제9장 벡터자기회귀(VAR)모형

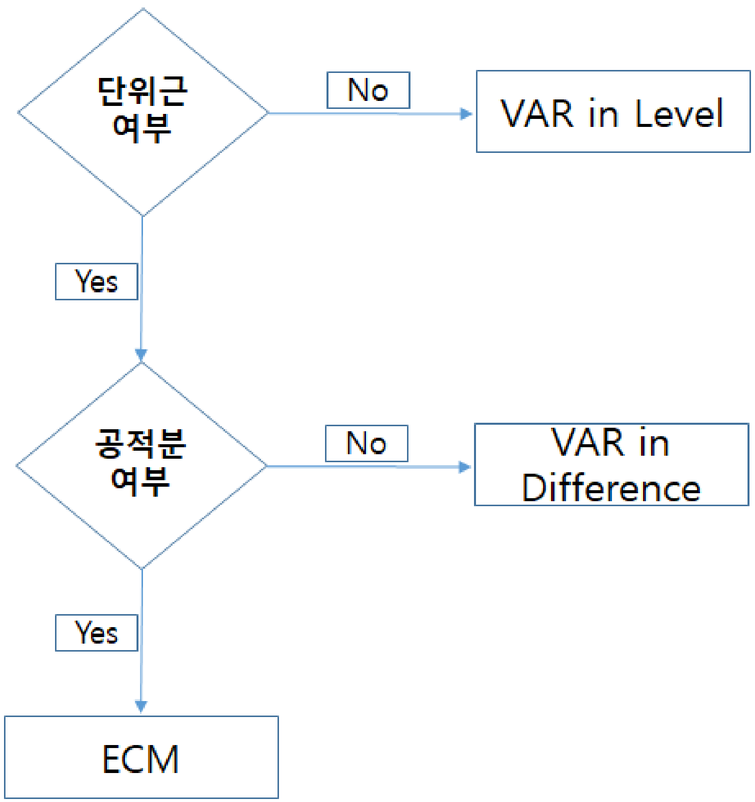
1. 배경
2. 모형
3. 분석도구:인과성 검정
4. 분석도구:충격반응함수
5. 분석도구:예측오차분산분해
6. 실증분석 사례

1. 배경

- 선험적인 경제이론을 배제한 상태에서 자료분석으로부터 경제 시계열들간의 관계에서 나타나는 특징적인 현상을 도출하고자 시도
- 전통적인 Keynesian 거시계량모형의 문제점(식별문제의 부적합성)에 대한 인식에서 출발
- (예)특정방정식의 식별은 '0의 제약'을 가해야 함

$$m_t = \alpha + \beta_0 y_t + \beta_1 i_t + \beta_2 \pi_t^e + \beta_3 m_{t-1} + e_t \text{ (화폐수요함수)}$$

- 원칙적으로 이용가능한 모든 정보를 포함시키지만 실제적으로는 문제가 되는 대표적인 변수들만을 선정하여 그들간의 관계를 분석. 즉, 기본적으로 변수선정에 제한을 두지 않지만 추정상의 편의를 위해 변수의 수와 시차수를 제약.
- 변수선정은 특별한 원칙은 없으며 특정목적에 따라 달라질 수 있음
- 모든 변수를 동일방정식에 동시에 포함시킴. 특정변수의 변화를 자신은 물론 다른 모든 변수의 과거값과 현재의 충격에 의해 설명
- 모형자체가 경제이론에서 출발한 것이 아니기 때문에 추정결과에 경제적 의미는 없음
- 추정방법은 OLS 또는 SURE
- 구조모형의 reduced form모형과 비슷함



$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + [A_1] \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ x_{3t-1} \end{bmatrix} + \ldots + [A_k] \begin{bmatrix} x_{1t-k} \\ x_{2t-k} \\ x_{3t-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix}$$

또는

$$X_t = \mu + A_1 X_{t-1} + \ldots + A_k X_{t-k} + u_t \qquad ⓐ$$

또는

$$X_t = \mu + A(L) X_t + u_t \qquad ⓑ$$

- VAR모형의 종류
  - Unrestricted VAR(UVAR)
  - Bayesian VAR(BVAR)
  - Structural VAR(SVAR)
  - Rational Expectation VAR(RVAR)

- A(L)은 시차연산자(lag operator) L의 다항식 행렬이다. 예를 들어 3변수가 2개의 시차를 갖는다고 할 때 A(L) 행렬은 다음과 같음

$$A(L) = \begin{bmatrix} a_{11}L + a_{12}L^2 & a_{13}L + a_{14}L^2 & a_{15}L + a_{16}L^2 \\ a_{21}L + a_{22}L^2 & a_{23}L + a_{24}L^2 & a_{25}L + a_{26}L^2 \\ a_{31}L + a_{32}L^2 & a_{33}L + a_{34}L^2 & a_{35}L + a_{36}L^2 \end{bmatrix}$$

- 모형의 문제점
  - 변수의 선정: 수준변수, 1차 차분변수(differencing), 전년동기대비증가율
    ->통계적 방법(단위근 검정, 공적분 검정..)을 통해 결정
  - 시차수의 선정: 통계적 방법(최적시차검정)을 통해 결정
  - 변수의 순서(ordering):변수의 배열순서에 따라 충격반응관계, 예측오차의 분산분해에 관한 결과가 달라짐
    -> 잔차항의 상관계수가 낮으면 문제가 되지 않음. 상관계수가 크면 인과성 검정의 결과에 의해 변수의 순서를 결정

- VAR 모형을 이용한 실증분석은 VAR 모형을 추정한 후 인과성 검정(causality test). 충격반응함수(impulse response function), 예측오차 분산분해(forecasting error variance decomposition) 등의 분석방법을 이용

(1) 결합검정

(예) $R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$과 $r=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$H_0: RB=r$ -> $H_0: \beta_3=\beta_4=\beta_5=0$ (q=3)

- 이상과 같은 일반적인 귀무가설 하에서

$$F=\frac{(R^2_{ur}-R^2_r)/q}{(1-R^2_{ur})/n-k} \sim F^q_{n-k}$$ (단, 여기서 R^2는 일반적으로 Centered R^2)

(적용 예시)화폐수요함수

$m_t=\beta_1+\beta_2 m_{t-1}+\beta_3 Y_t+\beta_4 rb_t+\beta_5 rc_t+u_t$ (unrestricted)

$H_0: \beta_4=\beta_5=0$ (q=2)

-귀무가설 하에서,

$m_t=\beta_1+\beta_2 m_{t-1}+\beta_3 Y_t+u^*_t$ (restricted)

(2) 인과성 검정

– Granger는 인과성(causality)을 다음과 같이 정의함

"만약 Y의 과거정보만을 가지고 Y를 예측할 때보다 X와 Y의 과거정보를 동시에 가지고 Y를 더욱 잘 예측할 수 있으면 X는 Y의 원인변수가 된다"

– 예를 들어 생산(Y) 방정식에 포함된 통화량(X)의 과거 값들이 현재 Y에 영향을 주지 못하여 그 계수 값이 전부 0이 된다면 통화량은 물가의 원인변수가 되지 못함

(예:실질생산과 통화량의 인과성분석)

$$y_t = c_1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_{t-j} + u_{1t}$$

$$m_t = c_2 + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i m_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j y_{t-j} + u_{2t}$$

(case1) $H_0 : \alpha_i \neq 0\,(for\,\forall\, i)$ and $\delta_j = 0\,(for\,\forall\, j)$

→귀무가설이 동시에 성립할 경우 m에서 y로 일방적 인과관계(unidirectional causality)가 존재

(case2) $H_0 : \alpha_i = 0\,(for\,\forall\, i)$ and $\delta_j \neq 0\,(for\,\forall\, j)$

→귀무가설이 동시에 성립할 경우 y에서 m으로 일방적 인과관계(unidirectional causality)가 존재

(case3) $H_0 : \alpha_i \neq 0\,(for\,\forall\, i)$ and $\delta_j \neq 0\,(for\,\forall\, j)$

→귀무가설이 성립할 경우 m과 y는 쌍방적 인과관계(bilateral causality)(또는 feedback 관계)가

(case4) $H_0 : \alpha_i = 0\,(for\,\forall\, i)$ and $\delta_j = 0\,(for\,\forall\, j)$

→귀무가설이 성립할 경우 m과 y는 통계적으로 서로 독립(statistically independent)

- VAR 모형에서 도출되는 충격반응함수(impulse response function)란 다음의 모형으로부터 도출된 이동평균모형으로 경제에 예상치 못한 변화(충격)가 주어졌을 때 모형내의 모든 변수들이 시간이 흐름에 따라 어떻게 각 충격에 반응하는 가를 나타내 주는 것임

$$X_t = \mu + A_1 X_{t-1} + \ldots + A_k X_{t-k} + u_t$$

(예:실질생산과 통화량의 충격반응함수)

$$y_t = \mu_{10} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + u_t^y$$

$$m_t = \mu_{20} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + u_t^m$$

- 이 경우 2개의 충격이 가능한데 하나는 y에 대한 충격(u_t^y)이고 다른 하나는 m에 대한 충격(u_t^m)임

- 또한 4개의 충격반응함수가 가능한데 y에 대한 충격이 y 및 m의 시간의 흐름에 따란 경로에 미치는 영향과 m에 대한 충격이 y 및 m의 시간의 흐름에 따란 경로에 미치는 영향으로 구분됨

(case 1) u_t^y과 u_t^m이 서로 독립인 경우 (u_t의 분산-공분산 행렬 즉, $E(u_t u_t')$이 대각행렬)

- 먼저, y에 대한 충격이 y 및 m의 시간의 흐름에 따른 경로에 미치는 영향을 살펴보면,
  - (가정)t=1기에 $u_1^y = \sigma_y$(1개의 표준편차 충격으로 innovation이라고도 함), 그 이후에는 0이 되며, 모든 t에 대해 $u_t^m = 0$이고 $y_0 = 0, m_0 = 0$
  - t=1일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_1 = u_1^y = \sigma_y$이고, m에 미치는 영향은 $m_1 = u_1^m = 0$임
  - t=2일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_2 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}m_1 = \alpha_{11}\sigma_y$이고,
    m에 미치는 영향은 $m_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}m_1 = \alpha_{21}\sigma_y$임
  - t=3일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_3 = \alpha_{11}y_2 + \alpha_{12}m_2 = \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_y$이고,
    m에 미치는 영향은 $m_3 = \alpha_{21}y_2 + \alpha_{22}m_2 = \alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{21}\sigma_y$임
  - t=4, 5, 에 대해 반복적으로 대입하면
    σ_y가 y에 미치는 영향은 $\sigma_y(1, \alpha_{11,} (\alpha_{11}\alpha_{11} + \alpha_{12}\alpha_{21}), \ldots\ldots)$이고,
    m에 미치는 영향은 $\sigma_y(0, \alpha_{21,} (\alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21}), \ldots\ldots)$임

<표 6-1> y의 표준편차 충격(σ_y)에 대한 반응함수

시간	y의 반응	m의 반응
t=1	σ_y	0
t=2	$\alpha_{11}\sigma_y$	$\alpha_{21}\sigma_y$
t=3	$\alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_y$	$\alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{21}\sigma_y$
.	.	.
.	.	.

- 다음으로, m에 대한 충격이 y 및 m의 시간의 흐름에 따른 경로에 미치는 영향을 살펴보면,
  - (가정)t=1기에 $u_1^m = \sigma_m$(1개의 표준편차 충격), 그 이후에는 0이 되며,

    모든 t에 대해 $u_t^y = 0$이고 $y_0 = 0, m_0 = 0$
  - t=1일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_1 = u_1^y = 0$이고, m에 미치는 영향은 $m_1 = u_1^m = \sigma_m$임
  - t=2일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_2 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}m_1 = \alpha_{12}\sigma_m$이고,

    m에 미치는 영향은 $m_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}m_1 = \alpha_{22}\sigma_m$임
  - t=3일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_3 = \alpha_{11}y_2 + \alpha_{12}m_2 = \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_m$이고,

    m에 미치는 영향은 $m_3 = \alpha_{21}y_2 + \alpha_{22}m_2 = \alpha_{21}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{22}\alpha_{22}\sigma_m$임
  - t=4, 5, 에 대해 반복적으로 대입하면

    σ_m가 y에 미치는 영향은 $\sigma_m(0, \alpha_{12,} (\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22}), \ldots\ldots)$이고,

    m에 미치는 영향은 $\sigma_m(1, \alpha_{22,} (\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}\alpha_{22}), \ldots\ldots)$임

<표 6-2> m의 표준편차 충격(σ_m)에 대한 반응함수

시간	y의 반응	m의 반응
t=1	0	σ_m
t=2	$\alpha_{12}\sigma_m$	$\alpha_{22}\sigma_y$
t=3	$\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_m$	$\alpha_{21}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{22}\alpha_{22}\sigma_m$
.	.	.
.	.	.

(case 2) u_t^y과 u_t^m이 서로 독립이 아닌 경우

- 이 경우 충격(원인)과 반응(결과)의 관계로 해석할 때 문제가 발생하는데 그 이유는 ⓑ에서 도출된 잔차항이 서로 독립이 아니기 때문에 즉, u_t의 공분산행렬이 대각행렬(diagonal matrix)이 아니기 때문에 한 변수에서 충격이 발생하면 이로 인해 다른 변수들이 변하고 이것이 다시 환류(feedback)되어 처음 충격이 시작된 변수에 다시 영향을 주게 됨
- 따라서 각 충격이 서로 독립적인 충격이 되도록 u_t를 변환시키면 되는데 이를 u_t의 공분산행렬을 직교화(orthogonalization)한다고 하고 직교화방법 중 다음과 같이 표현한 것을 촐레스키분해(Choleski factorization)라고 하며 이 경우 e_t^y과 e_t^m이 서로 독립임

$$y_t = \mu_{10} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + e_t^y$$

$$m_t = \mu_{20} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + \beta e_t^y + e_t^m \quad \text{(recursive ordering)}$$

- 먼저, y에 대한 충격(e_t^y)이 y 및 m의 시간의 흐름에 따른 경로에 미치는 영향을 살펴보면,
  - (가정)t=1기에 $e_1^y = \sigma_y$(1개의 표준편차 충격), 그 이후에는 0이 되며,
    모든 t에 대해 $e_t^m = 0$이고 $y_0 = 0, m_0 = 0$
  - t=1일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_1 = e_1^y = \sigma_y$이고, m에 미치는 영향은 $m_1 = \beta e_1^y = \beta\sigma_y$임
  - t=2일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_2 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}m_1 = \alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{12}\beta\sigma_y$이고,
    m에 미치는 영향은 $m_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}m_1 = \alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{22}\beta\sigma_y$임
  - t=3일 때 σ_y가 y에 미치는 영향은 $y_3 = \alpha_{11}y_2 + \alpha_{12}m_2 = \alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{11}\alpha_{12}\beta\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta\sigma_y$
    m에 미치는 영향은 $m_3 = \alpha_{21}y_2 + \alpha_{22}m_2 = \alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{21}\alpha_{12}\beta\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{22}\beta\sigma_y$
  - t=4, 5, 에 대해 반복적으로 대입하면
    σ_y가 y에 미치는 영향은 $\sigma_y(1, \alpha_{11} + \alpha_{12}\beta, (\alpha_{11}\alpha_{11} + \alpha_{11}\alpha_{12}\beta + \alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta), \ldots\ldots)$이고,
    m에 미치는 영향은 $\sigma_y(\beta, \alpha_{21} + \alpha_{22}\beta, (\alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{21}\alpha_{12}\beta + \alpha_{22}\alpha_{21} + \alpha_{22}\alpha_{22}\beta), \ldots\ldots)$임

<표 6-3> y의 표준편차 충격(σ_y)에 대한 반응함수

시간	y의 반응	m의 반응
t=1	σ_y	$\beta\sigma_y$
t=2	$\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{12}\beta\sigma_y$	$\alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{22}\beta\sigma_y$
t=3	$\alpha_{11}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{11}\alpha_{12}\beta\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta\sigma_y$	$\alpha_{21}\alpha_{11}\sigma_y + \alpha_{21}\alpha_{12}\beta\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{21}\sigma_y + \alpha_{22}\alpha_{22}\beta\sigma_y$
.	.	.
.	.	.

- 다음으로, m에 대한 충격(e_t^m)이 y 및 m의 시간의 흐름에 따른 경로에 미치는 영향을 살펴보면,
  - (가정)t=1기에 $e_1^m = \sigma_m$(1개의 표준편차 충격), 그 이후에는 0이 되며,

    모든 t에 대해 $e_t^y = 0$이고 $y_0 = 0, m_0 = 0$
  - t=1일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_1 = e_1^y = 0$이고, m에 미치는 영향은 $m_1 = e_1^m = \sigma_m$임
  - t=2일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_2 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}m_1 = \alpha_{12}\sigma_m$이고,

    m에 미치는 영향은 $m_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}m_1 = \alpha_{22}\sigma_m$임
  - t=3일 때 σ_m이 y에 미치는 영향은 $y_3 = \alpha_{11}y_2 + \alpha_{12}m_2 = \alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_m$이고,

    m에 미치는 영향은 $m_3 = \alpha_{21}y_2 + \alpha_{22}m_2 = \alpha_{21}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{22}\alpha_{22}\sigma_m$임
  - t=4, 5, 에 대해 반복적으로 대입하면

    σ_m가 y에 미치는 영향은 $\sigma_m(0, \alpha_{12,} (\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22}), \ldots\ldots)$이고,

    m에 미치는 영향은 $\sigma_m(1, \alpha_{22,} (\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}\alpha_{22}), \ldots\ldots)$임

<표 6-4> m의 표준편차 충격(σ_m)에 대한 반응함수

시간	y의 반응	m의 반응
t=1	0	σ_m
t=2	$\alpha_{12}\sigma_m$	$\alpha_{22}\sigma_m$
t=3	$\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_m$	$\alpha_{21}\alpha_{12}\sigma_m + \alpha_{22}\alpha_{22}\sigma_m$
.	.	.
.	.	.

5. 분석도구:예측오차분산분해

- 예측오차의 분산분해(forecasting error variance decompositions)란 한 변수의 변화를 설명함에 있어 모형 내 각 충격이 설명하는 비율로 표시한 것으로 예측오차의 분산분해를 이용하면 한 변수의 변화를 설명함에 있어 모형 내 각 충격의 상대적 중요도를 측정할 수 있음
- 즉, 예측오차의 분해란 한 변수의 변화에 관한 예측오차를 각 변수들에 의해서 발생하는 비율로 분할하는 것으로 이를 이용하여 한 변수의 변화를 설명함에 있어 모형 내 각 충격의 상대적 중요도를 측정할 수 있음

(case 1) u_t^y과 u_t^m이 서로 독립인 경우(각자 해 볼 것)

(case 2) u_t^y과 u_t^m이 서로 독립이 아닌 경우

- 촐레스키분해를 하면 e_t^y과 e_t^m이 서로 독립임

$$y_t = \mu_{10} + \alpha_{11} y_{t-1} + \alpha_{12} m_{t-1} + e_t^y$$

$$m_t = \mu_{20} + \alpha_{21} y_{t-1} + \alpha_{22} m_{t-1} + \beta e_t^y + e_t^m$$

- 먼저 1기 이후 예측을 하면

$$y_{t+1}^F = E_t[\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t + e_{t+1}^y] = \mu_{10} + \alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t$$

$$m_{t+1}^F = E_t[\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t + \beta e_{t+1}^y + e_{t+1}^m] = \mu_{20} + \alpha_{21} y_t + \alpha_{22} m_t$$

- 1기 이후 예측오차는

$$FE_1^y = y_{t+1} - E_t[y_{t+1}] = e_{t+1}^y$$
$$FE_1^m = m_{t+1} - E_t[m_{t+1}] = \beta e_{t+1}^y + e_{t+1}^m$$

- 1기 이후 예측오차의 분산은

$$Var(FE_1^y) = \sigma_y^2$$
$$Var(FE_1^m) = \beta^2 \sigma_y^2 + \sigma_m^2$$

- 첫 번째 시기에서 y에 대한 예측오차의 모든 변동은 자신의 충격으로 설명되고, m에 대한 예측오차의 변동은 y에 대한 충격과 자신의 충격으로 설명됨

- m에 대한 예측오차의 총분산 $\beta^2 \sigma_y^2 + \sigma_m^2$은 y에 대한 충격에서 기인한 부분인 $\beta^2 \sigma_y^2$과 m에 대한 충격에서 기인한 부분인 σ_m^2로 분해됨

- 따라서 m의 1기 이후 예측오차 분산을 m '자신'의 충격으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\sigma_m^2}{\beta^2 \sigma_y^2 + \sigma_m^2}$이고,

  m 이외의 '다른' 충격(여기서는 y 충격)으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\beta^2 \sigma_y^2}{\beta^2 \sigma_y^2 + \sigma_m^2}$임

- 다음으로 2기 이후 예측을 하면

$$\begin{aligned} y_{t+2}^F &= E_t[\alpha_{11} y_{t+1} + \alpha_{12} m_{t+1} + e_{t+2}^y] \\ &= E_t[\alpha_{11}(\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t + e_{t+1}^y) + \alpha_{12}(\alpha_{21} y_t + \alpha_{22} m_t + \beta e_{t+1}^y + e_{t+1}^m) + e_{t+2}^y] \\ &= \alpha_{11}(\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t) + \alpha_{12}(\alpha_{21} y_t + \alpha_{22} m_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{t+2}^F &= E_t[\alpha_{21} y_{t+1} + \alpha_{22} m_{t+1} + \beta e_{t+2}^y + e_{t+2}^m] \\ &= E_t[\alpha_{21}(\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t + e_{t+1}^y) + \alpha_{22}(\alpha_{21} y_t + \alpha_{22} m_t + \beta e_{t+1}^y + e_{t+1}^m) + \beta e_{t+2}^y + e_{t+2}^y] \\ &= \alpha_{21}(\alpha_{11} y_t + \alpha_{12} m_t) + \alpha_{22}(\alpha_{21} y_t + \alpha_{22} m_t) \end{aligned}$$

- 2기 이후 예측오차는

$$FE_2^y = y_{t+2} - E_t[y_{t+2}] = \alpha_{11} e_{t+1}^y + \alpha_{12} \beta e_{t+1}^y + \alpha_{12} e_{t+1}^m + e_{t+2}^y$$

$$FE_2^m = m_{t+2} - E_t[m_{t+2}] = \alpha_{21} e_{t+1}^y + \alpha_{22} \beta e_{t+1}^y + \alpha_{22} e_{t+1}^m + \beta e_{t+2}^y + e_{t+2}^m$$

- 2기 이후 예측오차의 분산은

$$Var(FE_2^y) = \alpha_{11}^2 \sigma_y^2 + \alpha_{12}^2 \beta^2 \sigma_y^2 + \alpha_{12}^2 \sigma_m^2 + \sigma_y^2$$

$$Var(FE_2^m) = \alpha_{21}^2 \sigma_y^2 + \alpha_{22}^2 \beta^2 \sigma_y^2 + \alpha_{22}^2 \sigma_m^2 + \beta^2 \sigma_y^2 + \sigma_m^2$$

- 두 번째 시기에서 y에 대한 예측오차의 변동은 자신의 충격과 m에 대한 충격으로 설명되고, m에 대한 예측오차의 변동은 y에 대한 충격과 자신의 충격으로 설명됨

- y에 대한 예측오차의 총분산 $\alpha_{11}^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\sigma_m^2+\sigma_y^2$ 은 y에 대한 충격에서 기인한 부분인 $\alpha_{11}^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\beta^2\sigma_y^2+\sigma_y^2$과 m에 대한 충격에서 기인한 부분인 $\alpha_{12}^2\sigma_m^2$로 분해됨

- 따라서 y의 2기 이후 예측오차 분산을 y '자신'의 충격으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\alpha_{11}^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\beta^2\sigma_y^2+\sigma_y^2}{\alpha_{11}^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\sigma_m^2+\sigma_y^2}$이고 y 이외의 '다른' 충격(여기서는 m 충격)으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\alpha_{12}^2\sigma_m^2}{\alpha_{11}^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{12}^2\sigma_m^2+\sigma_y^2}$임

- 한편, m에 대한 예측오차의 총분산 $\alpha_{21}^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\sigma_m^2+\beta^2\sigma_y^2+\sigma_m^2$은 y에 대한 충격에서 기인한 부분인 $\alpha_{21}^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\beta^2\sigma_y^2+\beta^2\sigma_y^2$과 m에 대한 충격에서 기인한 부분인 $\alpha_{22}^2\sigma_m^2+\sigma_m^2$로 분해됨

- 따라서 m의 2기 이후 예측오차 분산을 m '자신'의 충격으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\alpha_{22}^2\sigma_m^2+\sigma_m^2}{\alpha_{21}^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\sigma_m^2+\beta^2\sigma_y^2+\sigma_m^2}$이고 m 이외의 '다른' 충격(여기서는 y 충격)으로 설명할 수 있는 비율은 $\dfrac{\alpha_{21}^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\beta^2\sigma_y^2+\beta^2\sigma_y^2}{\alpha_{21}^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\beta^2\sigma_y^2+\alpha_{22}^2\sigma_m^2+\beta^2\sigma_y^2+\sigma_m^2}$임

6. 실증분석 사례

- 변수:실질GNP, 총통화(M2)
- 자료:log값
- 추정기간:1977:1 - 1993:2
- 시차=1
- 기타: 상수항 포함

① 모형

$$\begin{bmatrix} y_t \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + [A_1] \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ m_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

② 추정결과(OLS equation-by-equation)

	Dependent variable:	
	dy (1)	dm (2)
L(dy)	-0.578*** (0.105)	0.067*** (0.010)
L(dm)	-1.664* (0.966)	0.401*** (0.095)
Constant	0.114** (0.053)	0.027*** (0.005)
Observations	64	64
R2	0.339	0.467
Adjusted R2	0.318	0.450
Residual Std. Error (df = 61)	0.181	0.018
F Statistic (df = 2; 61)	15.658***	26.756***
Note:	*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01	

③ 잔차항의 공분산 행렬 및 촐레스키 분해

```
Covariance matrix of residuals:
          dy        dm
dy 0.032584 0.0012020
dm 0.001202 0.0003156
```

- 위에서 추정된 잔차항은 서로 독립이 아니기 때문에 이 공분산행렬을 촐레스키분해(Choleski Factorization)하면 다음과 같음

$$Choleski\text{행렬} = \begin{bmatrix} 0.180511 & 0 \\ 0.006659 & 0.01647 \end{bmatrix}$$

④ Granger의 인과성검정(Causality Test)

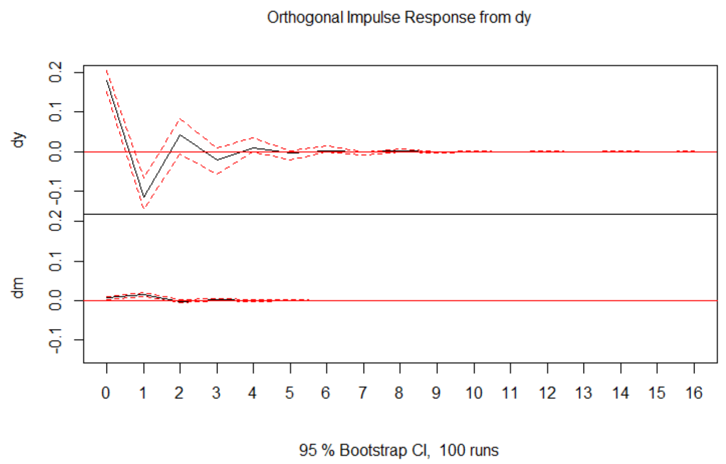
```
Estimation results for equation dy:
=====================================
dy = dy.l1 + dm.l1 + const

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
dy.l1 -0.57785    0.10464  -5.522  7.3e-07 ***
dm.l1 -1.66350    0.96612  -1.722   0.0902 .
const  0.11436    0.05256   2.176   0.0335 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

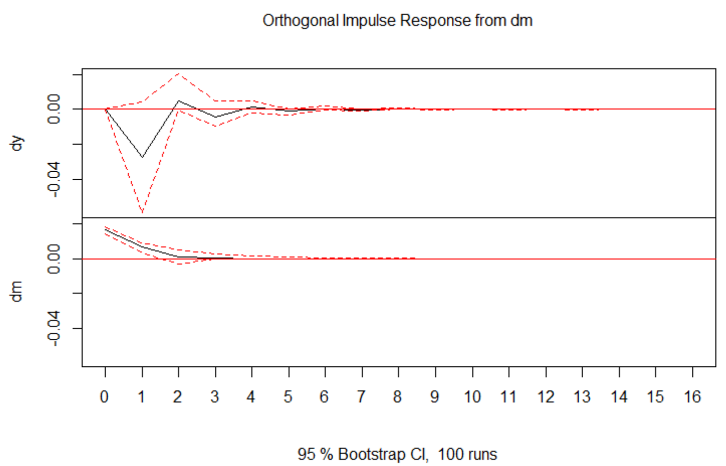
```
Estimation results for equation dm:
=====================================
dm = dy.l1 + dm.l1 + const

      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
dy.l1 0.067331   0.010299   6.538 1.43e-08 ***
dm.l1 0.401414   0.095082   4.222 8.20e-05 ***
const 0.027190   0.005173   5.256 1.99e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

=>DY는 DM에 원인변수가 되지만 DM은 DY의 원인변수가 되지 못함

⑤ 충격반응함수(Impulse Response Function)

- VAR모형에서 도출되는 충격반응함수란 모형으로부터 도출된 이동평균모형임
- 경제에 예상치 못한 변화(충격)가 주어졌을 때 모형내의 모든 변수들이 시간이 흐름에 따라 어떻게 각 충격에 반응하는 가를 나타내 주는 것임





⑥ 예측오차의 분산분해(Forecasting Error Variance Decomposition)

- 한 변수의 변화를 설명함에 있어 VAR모형내 포함된 각 변수들의 상대적 중요도를 측정하는데 이용됨. 즉, 예측오차의 분해란 한 변수의 변화에 관한 예측오차를 각 변수들에 의해서 발생하는 비율로 분할하는 것임
- 이를 이용하여 한 변수의 변화를 설명함에 있어 모형내 각 충격의 상대적 중요도를 측정할 수 있음.

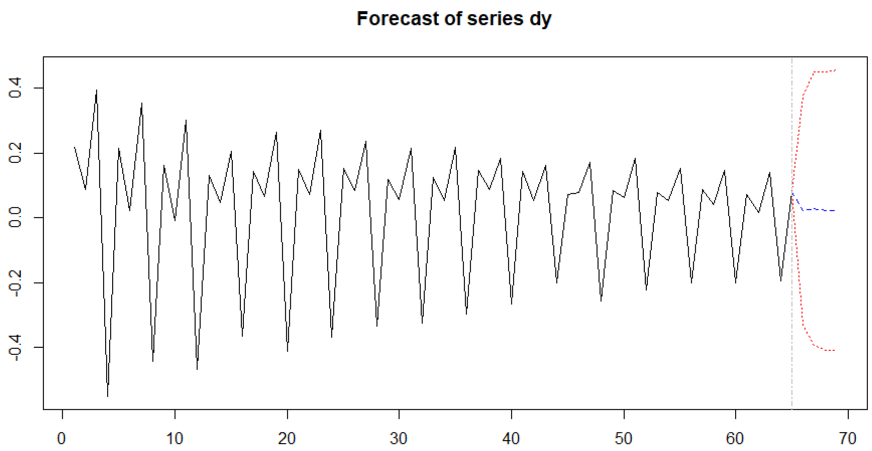
```
> fevd.dy*100
             dy       dm
 [1,] 100.00000 0.000000
 [2,]  98.39083 1.609175
 [3,]  98.40199 1.598008
 [4,]  98.38228 1.617725
 [5,]  98.38138 1.618621
 [6,]  98.38087 1.619129
 [7,]  98.38081 1.619188
 [8,]  98.38079 1.619205
 [9,]  98.38079 1.619208
[10,]  98.38079 1.619208
[11,]  98.38079 1.619208
[12,]  98.38079 1.619208
[13,]  98.38079 1.619208
[14,]  98.38079 1.619208
[15,]  98.38079 1.619208
[16,]  98.38079 1.619208
```

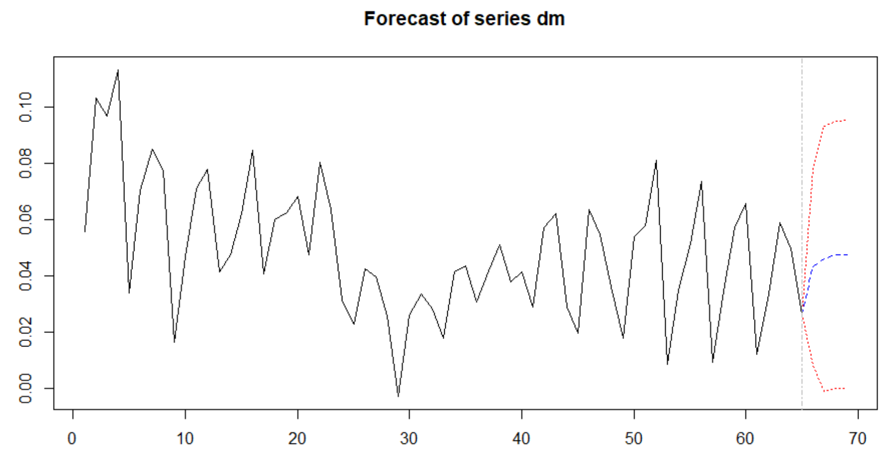
```
> fevd.dm*100
            dy       dm
 [1,] 14.04896 85.95104
 [2,] 45.61420 54.38580
 [3,] 45.87099 54.12901
 [4,] 46.24368 53.75632
 [5,] 46.27529 53.72471
 [6,] 46.28631 53.71369
 [7,] 46.28792 53.71208
 [8,] 46.28830 53.71170
 [9,] 46.28837 53.71163
[10,] 46.28839 53.71161
[11,] 46.28839 53.71161
[12,] 46.28839 53.71161
[13,] 46.28839 53.71161
[14,] 46.28839 53.71161
[15,] 46.28839 53.71161
[16,] 46.28839 53.71161
```

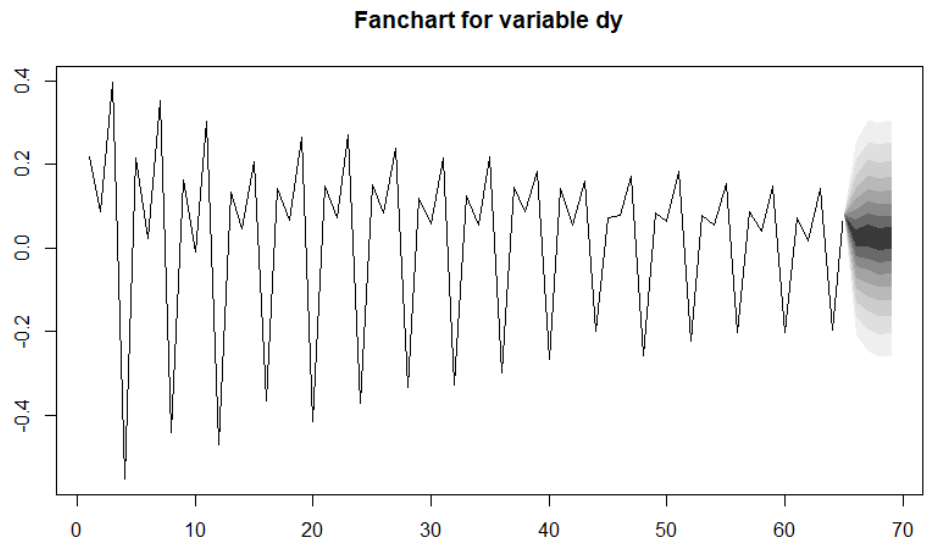
⑦ 예측

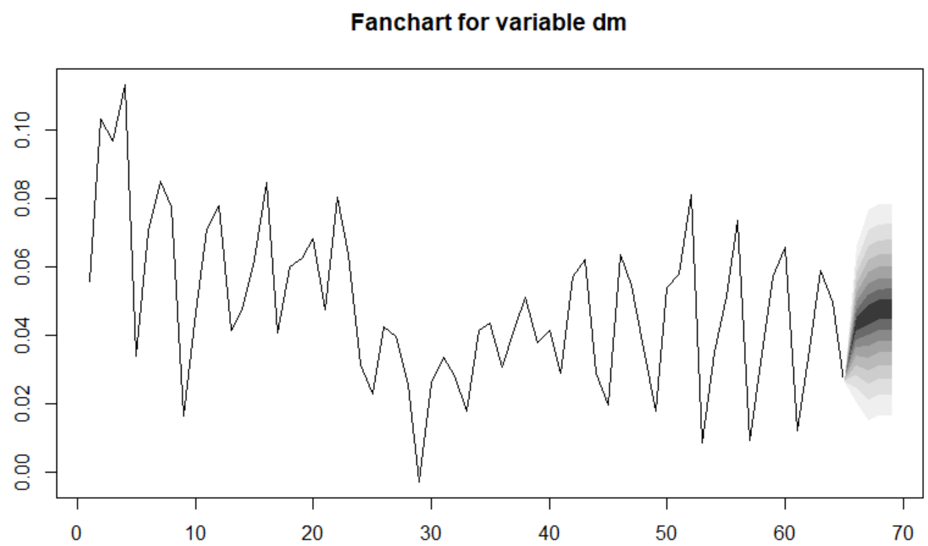
- VAR(1)모형의 추정에 근거하여 1993년 2/4분기까지의 정보를 바탕으로 1년 이후 즉, 1994년 2/4분기까지 점 예측치 및 구간예측을 구할 수 있음

```
> var4.pred
$dy
           fcst      lower     upper        CI
[1,] 0.02346311 -0.3303327 0.3772589 0.3537958
[2,] 0.02880981 -0.3945098 0.4521294 0.4233196
[3,] 0.02095364 -0.4104036 0.4523109 0.4313572
[4,] 0.02298110 -0.4104587 0.4564209 0.4334398

$dm
           fcst         lower      upper         CI
[1,] 0.04327568  0.0084563208 0.07809505 0.03481936
[2,] 0.04614107 -0.0010266217 0.09330876 0.04716769
[3,] 0.04765127  0.0003227157 0.09497983 0.04732856
[4,] 0.04772853  0.0002043886 0.09525267 0.04752414
```






Fanchart for variable dy
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
0
10
20
30
40
50
60
70


Fanchart for variable dm
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70