1. 일반화최소자승법
2. 자기상관
   (1) 개념 및 유형
   (2) 검정
   (3) 해결책

1.일반화최소자승법

①고전적 회귀모형과 보통최소자승법

$$Y = X \quad B + \quad U$$

nx1 nxk kx1 nx1

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \cdots & X_{k2} \\ . & . & . & . \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

-행렬표현 다중회귀모형에서 기본적인 가정들이 성립하는 고전적 회귀모형의 경우 보통최소자승법(OLS)으로 추정한 추정량은 최량선형불편추정량(BLUE)임을 보인 바 있음

–여러 가지 기본적인 가정들 중 다음과 같은 교란항의 동분산 (homoscedasticity)과 비자기상관(no autocorrelation)이 대표적인 가정임

$$E(UU') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & .. & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & .. & E(u_2u_k) \\ . & . & .. & . \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & .. & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 I_n$$

②교란항에 대한 가정의 위배

-그러나 현실적으로 위의 가정이 성립하지 않는 경우가 발생

-즉, 자기상관(1차 자기상관)과 이분산(heteroscedasticity)인 경우가 발생

$$E(UU') = \sigma_u^2 \Omega = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \cdot\cdot & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho \cdot\cdot & \rho^{n-2} \\ . & . & . \;\; .. & . \\ . & . & . \;\; .. & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . \;\; .. & 1 \end{bmatrix} \neq \sigma_u^2 I_n$$

(자기상관(1차 자기상관))

$$E(UU') = \sigma_u^2 \Omega = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} k_1^2 & 0 & .\,. & 0 \\ 0 & k_2^2 & .\,. & 0 \\ . & . & .\,. & . \\ 0 & 0 & .\,. & k_n^2 \end{bmatrix} \neq \sigma_u^2 I_n$$

(이분산)

–자기상관이나 이분산이 있음에도 불구하고 보통최소자승법으로 추정하면 추정량은 편의는 없으나 효율적인 추정량이 되지 못함

–행렬표현 다중회귀모형의 OLS 추정량은 다음과 같음

$$
\begin{aligned}
\hat{B} &= (X'X)^{-1}X'Y \\
&= (X'X)^{-1}X'(XB+U) \\
&= (X'X)^{-1}X'XB+(X'X)^{-1}X'U \\
&= B+(X'X)^{-1}X'U
\end{aligned}
$$

–위 식의 기댓값을 계산하면 다음과 같게 되어 $\hat{B}$ 은 B 의 불편추정량 (unbiased estimator)이 됨

$$
\begin{aligned}
E(\hat{B}) &= B+(X'X)^{-1}X'E(U) \\
&= B
\end{aligned}
$$

-다음으로 $E(UU')\neq\sigma_u^2 I_n$ 인 경우 OLS 추정량의 분산을 구해 보면 다음과 같음

$$\begin{aligned} Var(\hat{B}) &= E[(\hat{B}-E(\hat{B})(\hat{B}-E(\hat{B}))'] \\ &= E[(\hat{B}-B)(\hat{B}-B)'] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(UU')X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\sigma_u^2\Omega X(X'X)^{-1} \\ &= \sigma_u^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

- $E(UU')=\sigma_u^2 I_n$ 인 경우 분산은 $Var(\hat{B})=\sigma_u^2(X'X)^{-1}$ 으로 이 분산이 Gauss-Markov정리에 의해 최소분산임이 증명되므로 위의 분산은 최소분산이 되지 못함

-결론적으로, 자기상관이나 이분산이 있음에도 불구하고 보통최소자승법으로 회귀계수를 추정하면 편의는 없으나 효율적인 추정량을 얻지 못하고 통계적 추론에서도 문제가 발생

③일반화최소자승법

-고전적 회귀모형에서 교란항에 대한 기본가정이 충족되지 않을 경우 모형을 기존가정이 충족될 수 있도록 변환하여 최소자승법으로 추정하면 최량불편 추정량을 얻을 수 있음

-이를 일반화최소자승법(Generalized Least Squares: GLS) 또는 Aitken의 최소자승법이라고 하며 그 절차는 다음과 같음

첫째, $PP' = \Omega$라고 하면 $(P^{-1})'P^{-1} = \Omega^{-1}$이 되는데 여기서 P^{-1}를 L로 두면 아래의 명제에 의하여 $L'L = \Omega^{-1}$을 만족하는 비특이행렬 L이 존재함.

> (명제) 어떠한 대칭양정부호행렬(symmetric positive definite matrix) Ω에 대해서 $PP' = \Omega$를 충족시키는 비특이행렬(nonsingular matrix) P가 존재한다.

둘째, 다음의 회귀모형에 L을 곱하면 변환하여

$$Y = XB + U$$

$$E(UU') = \sigma^2 \Omega$$

다음과 같은 변환된 회귀모형을 얻음

$$LY = LXB + LU$$

또는

$$Y^* = X^* B + U^*$$

셋째, 변환된 모형의 교란항 평균과 분산을 구함

(평균) $E(U^*) = E(LU)$

$$= LE(U)$$

$$= 0$$

(분산) $E(U^* U^{*\prime}) = Var(LU)$

$$= E(LUU'L')$$

$$= \sigma^2 L\Omega L'$$

$$= \sigma^2 LL^{-1}L'^{-1}L' \left(\because L^{-1}L'^{-1} = \Omega \leftarrow L'L = \Omega^{-1} \right)$$

$$= \sigma^2 I_n$$

–변환된 모형의 교란항 평균은 0이고 분산은 자기상관이 되어 있지 않으며 동분산의 조건을 만족하므로 변환된 모형을 최소자승법으로 추정하면 BLUE를 얻을 수 있는데 이러한 방법을 일반화최소자승법(GLS)이라고 함

넷째, GLS 추정량은 변환된 모형을 OLS로 추정하면 구할 수 있음

$$
\begin{aligned}
\widehat{B_G} &= (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}Y^* \\
&= (X'L'LX)^{-1}X'L'LY \\
&= (X^{-1}L^{-1}L^{-1\prime}X^{-1\prime})X'L'LY \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y
\end{aligned}
$$

교란항의 분산 및 회귀계수의 분산에 대한 추정량은 다음과 같음

$$
\widehat{\sigma_u^2} = \frac{e'\Omega^{-1}e}{n-k}
$$

$$
Var(\widehat{B_G}) = \widehat{\sigma_u^2}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}
$$

2.자기상관

(1)개념 및 유형

-경제시계열의 경우 과거 값이 현재에 영향을 주고 현재 값이 미래에 영향을 주어 추세나 순환현상을 보이는 경우가 많이 있음

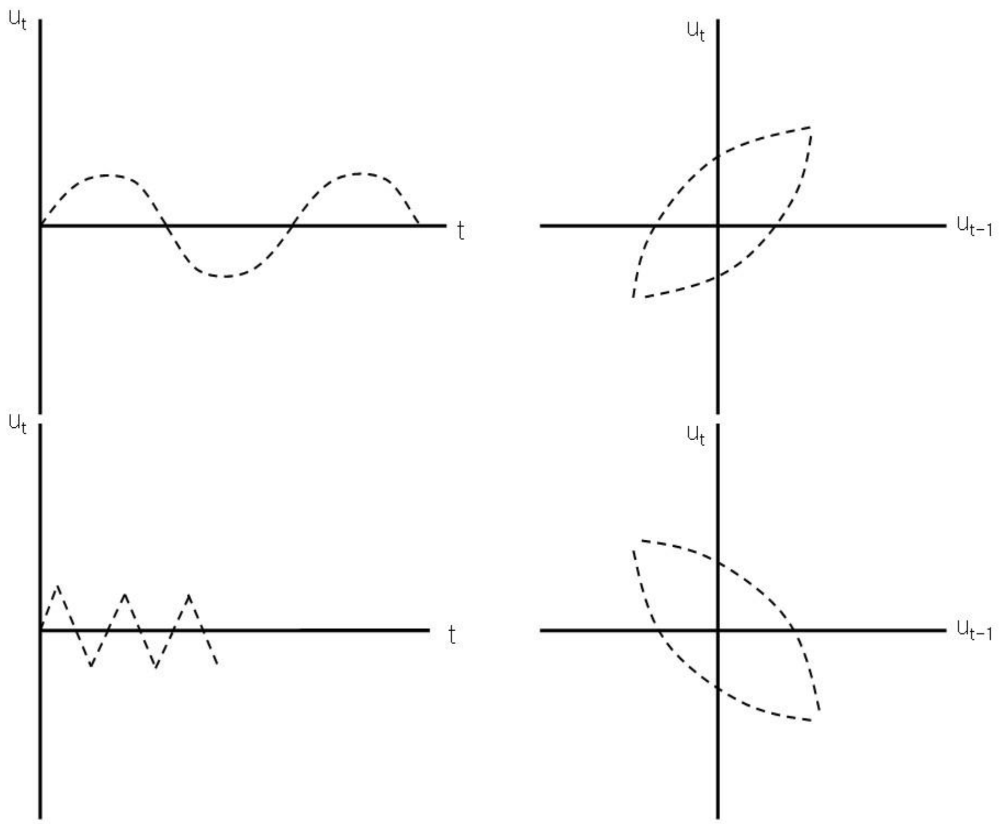
-이러한 현상을 보이는 이유는 경제에 외부충격(예상치 못한 변화)이 주어졌을 때 그 충격의 영향이 단기간에 끝나지 않고 장기적으로 지속되기 때문임

-시계열에 있어 t기의 교란항의 값인 u_t (이를 예상치 못한 변화로 해석)이 t-1기의 교란항의 값인 u_{t-1} 와 상관관계가 있는 경우를 계열상관(serial correlation) 또는 자기상관(autocorrelation)이 있다고 하며 특히, 이 경우를 1차 자기상관(first-order autocorrelation)이라 함

$$Y_t = X_t B + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

-자기상관의 유형에는 양의 계열상관(positive autocorrelation) 및 음의 계열상관(negative autocorrelation)이 있으며 그 유형은 그림과 같음



(양의 자기상관)

(음의 자기상관)

(2)검정

-시계열의 자기상관 여부를 탐지하는 방법으로는
· 그래프 분석(residual plotting): 회귀식으로부터 도출된 잔차를 그려 보아 자기상관 여부를 판단하는 방법
· 통계적 검정: Durbin-Watson 검정방법, LM(Lagrange Multiplier) 검정방법

①그래프분석
-자기상관을 탐지하는 가장 간단한 방법은 잔차에 상관관계가 나타나는 지를 그래프를 통해 살펴보는 것인데 잔차가 위의 그림과 같은 경향을 보이면 자기상관이 있는 것으로 판단하나 이 방법은 주관적이며, 과학적이지 못함

② Durbin-Watson 검정방법
-교란항의 자기상관 여부를 검정하는데 가장 많이 사용되는 방법

-d-통계량을 이용

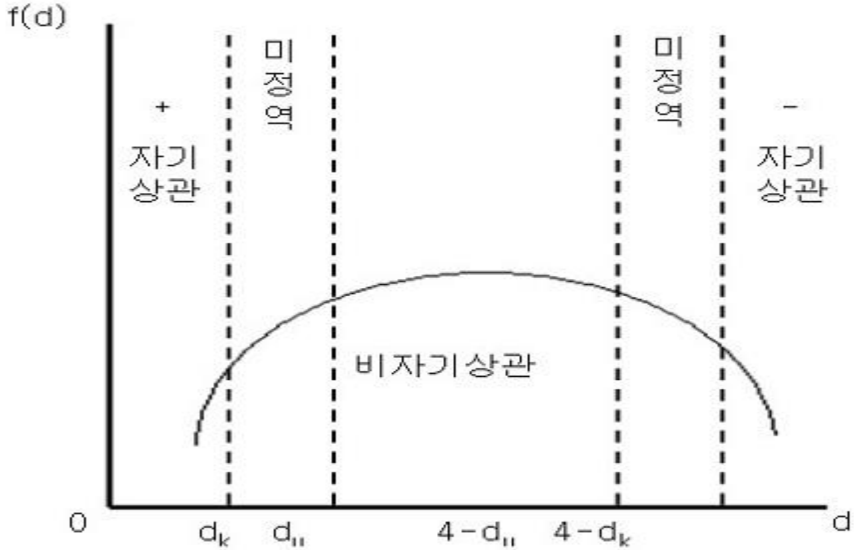
- $\hat{\rho}=0$ 이면 $d \fallingdotseq 2$이므로 d-통계량의 값이 2에 가까우면 자기상관이 없음
- $\hat{\rho}>0$ 이면 d<2이고, 특히 $\hat{\rho}$ 이 1로 접근할수록 d는 0으로 접근하므로 d-통계량의 값이 0과 2사이에 있으면 양(+)의 자기상관
- $\hat{\rho}<0$ 이면 d>2이고, 특히 $\hat{\rho}$ 이 -1로 접근할수록 d는 4로 접근하므로 d-통계량의 값이 2와 4사이에 있으면 음(-)의 자기상관

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{N}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N} e_t^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{N} e_t^2 + \sum_{t=2}^{N} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{N} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{N} e_t^2}$$

$$\fallingdotseq 2(1-\hat{\rho})$$

-DW-검정(<부록 4>의 <표 5>)은 1차 자기상관을 검정
-회귀모형은 상수항을 반드시 포함하고 있어야 하고, 회귀모형의 설명변수에 종속변수의 시차변수가 존재하지 않아야 함
-즉, 자기회귀모형에는 DW-검정방법을 적용할 수 없으며 이때는 h통계량을 이용
-이 방법은 분포를 이용한 검정방법이라는 장점은 있으나 자기상관 여부를 결정할 수 없는 영역(미정영역)이 있다는 단점이 있음



③ LM(Lagrange Multiplier) 검정방법

-이 검정방법은 Durbin-Watson 검정방법의 한계점이나 단점에서 지적한 문제와 관계없이 사용할 수 있는 검정방법이라는 장점이 있으나 자료의 수가 많을 때 사용될 수 있다는 단점이 있음

-(예) 다음과 같은 식에 대한 LM-검정은 다음과 같은 순서로 함

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad Ⓐ$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

-제1단계: Ⓐ식의 모형을 추정한 후 다음과 같은 잔차를 구함

$$\widehat{u_t} = Y_t - \widehat{\beta_1} - \widehat{\beta_2} X_{2t} - \widehat{\beta_3} X_{3t} \qquad Ⓑ$$

-2단계: Ⓑ식에서 구한 잔차를 Ⓐ식에 포함되어 있는 설명변수와 $\hat{u}_{t-1}$에 대해 다음 식과 회귀모형을 추정하는데 이를 보조회귀식(auxiliary regression)이라고 함

$$\widehat{u_t} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \rho \hat{u}_{t-1} + v_t$$

-이 경우 검정하고자 하는 귀무가설은 $H_o : \rho = 0$ 즉, 자기상관이 없다는 것이며 귀무가설 하에서 다음의 LM 검정통계량과 그 분포를 구할 수 있음

$$LM = nR^2 \sim \chi_1^2$$

단, n은 관측치의 수, R^2는 보조회귀식에서의 결정계수이며 χ^2-분포의 자유도는 1임

(3)해결책

-원자료(original data)를 적당한 방법으로 변환시켜 고전적 회귀모형의 기본 가정에 맞도록 한 후 OLS로 추정하면 됨

-그러면 원자료를 어떻게 변환시킬 것인가?

-이에 대한 단서를 찾기 위하여 교란항이 1차 자기상관이 있을 경우 교란항의 분산-공분산행렬(variance-covariance matrix)은 어떻게 생겼는지를 살펴봄

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

단, $E(e_t = 0)$. $E(e_t e_t{}') = \sigma_e^2 I_n$, $E(u_{t-1} e_t) = 0$

-위 식을 1차 차분방정식(difference equation)이라 하는데 차분방정식을 푸는 방법 중 하나로 연속적인 대입방법(successive substitution)이 있음

-연속적인 대입을 통해 차분방정식을 풀어보면 다음과 같음

$$
\begin{aligned}
u_t &= \rho u_{t-1} + e_t \\
&= \rho(\rho u_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 (e_{t-2} + \rho u_{t-3}) \\
&\quad \vdots \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i e_{t-i}
\end{aligned}
$$

-위 식을 이용하여 u_t의 분산을 구해 보면 다음과 같음

$$
\begin{aligned}
Var(u_t) &= \sigma_e^2 + \rho^2 \sigma_e^2 + \rho^4 \sigma_e^2 + \dots \\
&= \sigma_e^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho^2} \\
&= \sigma_u^2
\end{aligned}
$$

- u_t와 $u_{t-j}(j=1,2,\ldots,s)$의 공분산을 구해 보면 다음과 같음

$$Cov(u_t u_{t-1}) = \rho\sigma_e^2 + \rho^3\sigma_e^2 + \rho^5\sigma_e^2 + \ldots$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho\sigma_u^2$$

$$Cov(u_t u_{t-2}) = \rho^2\sigma_e^2 + \rho^4\sigma_e^2 + \rho^6\sigma_e^2 + \ldots$$
$$= \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho^2\sigma_u^2$$

$$Cov(u_t u_{t-s}) = \rho^s\sigma_e^2 + \rho^{(s+2)}\sigma_e^2 + \rho^{(s+4)}\sigma_e^2 + \ldots$$
$$= \frac{\rho^s}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho^s\sigma_u^2$$

-교란항의 분산-공분산 행렬은 다음과 같음

$$E(UU') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & .. & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & .. & E(u_2u_n) \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & .. & E(u_n^2) \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & .. & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & .. & \rho^{n-2} \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . & .. & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & .. & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & .. & \rho^{n-2} \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . & .. & 1 \end{bmatrix} = \sigma_e^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & .. & \frac{\rho^{n-1}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & .. & \frac{\rho^{n-2}}{1-\rho^2} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ \frac{\rho^{n-1}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{n-2}}{1-\rho^2} & .. & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_e^2 \Omega$$

-위 Ω로부터 다음과 같이 Ω 역행렬을 구할 수 있음(이는 $\Omega\Omega^{-1}=I$ 임을 통해 확인할 수 있음)

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & . & . & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & . & . & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

-위 식으로부터 다음의 L행렬을 구할 수 있음($L'L=\Omega^{-1}$임을 통해 확인할 수 있음)

$$L=\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

-L을 이용하여 원래자료를 변환시키면 종속변수 및 독립변수를 다음과 같이 변환할 수 있는데 이를 Paris-Winstern 변환이라 함

$$y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,y_1$$

$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1} \quad (t \geqq 2)$$

$$x_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,x_1$$

$$x_t^* = x_t - \rho x_{t-1} \quad (t \geqq 2)$$

-다음의 모형을 예로 들어 원자료를 변환시키는 방법을 살펴보면

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad Ⓐ$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

-먼저 Ⓐ식을 한 기간 이전의 식으로 표현하면 다음과 같음.

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t-1} + u_{t-1}$$

-위 식의 양변에 ρ를 곱한 후 Ⓐ식에서 빼면 다음 식과 같게 되는데 이를 Cochrane-Orcutt 변환(transformation)이라고 함

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t} - \rho X_{2t-1}) + \beta_3(X_{3t} - \rho X_{3t-1}) + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

-위 식에서 $\beta_1^* = \beta_1(1-\rho)$라 표기하면 다음 식과 같음

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \beta_3 X_{3t}^* + \epsilon_t$$

단, $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$, $X_{2t}^* = (X_{2t} - \rho X_{2t-1})$, $X_{3t}^* = (X_{3t} - \rho X_{3t-1})$

-위 식의 추정방법은 두 가지임

①ρ를 알고 있는 경우

- $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$, , $X_{2t}^* = (X_{2t} - \rho X_{2t-1})$, $X_{3t}^* = (X_{3t} - \rho X_{3t-1})$를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 GLS추정량이라고 함

②ρ의 값이 알려져 있지 않을 경우

-ρ을 추정한 후 자료를 변환하고 OLS를 적용하는데 ρ값을 추정하는 방법에는 여러 가지가 있음

(1) Durbin의 2단계 추정법

-1단계 : Cochrane-Orcutt 변환(transformation) 식을 다시 정리하면 다음 식이 되는데 이를 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$를 얻음

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \beta_1^* + \beta_2 X_{2t} - \beta_2 \rho X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t} - \beta_3 \rho X_{3t-1} + \epsilon_t$$

-2단계 : 1단계에서 구한 $\hat{\rho}$으로 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 FGLS추정량이라고 함

(2) Cochrane-Orcutt의 2단계 절차

-1단계 : Ⓐ식을 OLS로 추정하여 $\hat{u}_t$를 얻고 다음으로 $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + e_t$의 회귀모형을 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$을 얻음

-2단계 : $\hat{\rho}$을 이용하여 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 FGLS추정량이라고 함

(3) Cochrane-Orcutt의 반복절차

-1단계: Ⓐ식을 OLS로 추정하여 잔차 $\hat{u}_t$를 구한다.

-2단계: 1단계에서 추정된 잔차를 이용하여 다음 식을 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$을 구하는데 이를 ρ의 1단계 추정치라고 함

$$\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + e_t$$

-3단계: 2단계에서 추정된 $\hat{\rho}$을 이용하여 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하여 $\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \hat{\beta}_3^*$을 구함

-4단계: $\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \hat{\beta}_3^*$을 이용하여 다음의 새로운 잔차를 구함

$$\hat{u}_t^* = Y_t - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_{2t} - \hat{\beta}_3^* X_{3t}$$

-5단계: 새로운 잔차를 이용하여 다음 식을 OLS로 추정하여 새로운 1차 자기상관계수($\hat{\hat{\rho}}$)를 구하는데 이를 ρ의 2단계 추정치라고 함

$$\hat{u}_t^* = \rho \hat{u}_{t-1}^*$$

-6단계: 위의 과정을 다음의 수렴조건이 충족될 때까지 반복

$$| \hat{\rho}_j - \widehat{\rho_{j+1}} | < 0.005$$

단, 0.005를 수렴한계치(convergence limit)라고 함