10주차 3차시 : 일반화최소자승법(GLS)

1. 일반화최소자승법

(1) 고전적 회귀모형과 보통최소자승법

(2) 교란항에 대한 가정의 위배

(3) 일반화최소자승법

1.일반화최소자승법

(1)고전적 회귀모형과 보통최소자승법

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{X}\,\underset{k\times 1}{B} + \underset{n\times 1}{U}$$

$$\underset{n\times 1}{Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}} \qquad \underset{n\times k}{X=\begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \cdots & X_{k2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}} \qquad \underset{k\times 1}{B=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}} \qquad \underset{n\times 1}{U=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}$$

-행렬표현 다중회귀모형에서 기본적인 가정들이 성립하는 고전적 회귀모형의 경우 보통최소자승법(OLS)으로 추정한 추정량은 최량선형불편추정량(BLUE)임을 보인 바 있음

-여러 가지 기본적인 가정들 중 다음과 같은 교란항의 동분산 (homoscedasticity)과 비자기상관(no autocorrelation)이 대표적인 가정임

$$\mathrm{E(UU')} = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & E(u_1u_3) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & E(u_2u_3) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & E(u_nu_3) & \cdots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1u_2) & Cov(u_1u_3) & \cdots & Cov(u_1u_n) \\ Cov(u_2u_1) & Var(u_2) & Cov(u_2u_3) & \cdots & Cov(u_2u_k) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ Cov(u_nu_1) & Cov(u_nu_2) & Cov(u_nu_3) & \cdots & Var(u_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 I_n$$

(2)교란항에 대한 가정의 위배

-그러나 현실적으로 위의 가정이 성립하지 않는 경우가 발생

-즉, 자기상관(1차 자기상관)과 이분산(heteroscedasticity)인 경우가 발생

$$E(UU') = \sigma_u^2\Omega = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq \sigma_u^2 I_n$$ (자기상관(1차 자기상관))

$$E(UU') = \sigma_u^2\Omega = \sigma_u^2\begin{bmatrix} k_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & . & \cdots & k_n^2 \end{bmatrix} \neq \sigma_u^2 I_n$$ (이분산)

-자기상관이나 이분산이 있음에도 불구하고 보통최소자승법으로 추정하면 추정량은 편의는 없으나 효율적인 추정량이 되지 못함

-행렬표현 다중회귀모형의 OLS 추정량은 다음과 같음

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$= (X'X)^{-1}X'(XB + U)$$

$$= (X'X)^{-1}X'XB + (X'X)^{-1}X'U$$

$$= B + (X'X)^{-1}X'U$$

-위 식의 기댓값을 계산하면 다음과 같게 되어 $\hat{B}$은 B의 불편추정량 (unbiased estimator)이 됨

$$E(\hat{B}) = B + (X'X)^{-1}X'E(U)$$

$$= B$$

-다음으로 $E(UU') \neq \sigma_u^2 I_n$인 경우 OLS 추정량의 분산을 구해 보면 다음과 같음

$$Var(\hat{B}) = E[(\hat{B} - E(\hat{B}))(\hat{B} - E(\hat{B}))']$$

$$= E[(\hat{B} - B)(\hat{B} - B)']$$

$$= (X'X)^{-1}X'E(UU')X(X'X)^{-1}$$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma_u^2\Omega X(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma_u^2(X'X)^{-1}(X'\Omega X)(X'X)^{-1}$$

– $E(UU') = \sigma_u^2 I_n$인 경우 분산은 $Var(\hat{B}) = \sigma_u^2(X'X)^{-1}$ 으로 이 분산이 Gauss-Markov정리에 의해 최소분산임이 증명되므로 위의 분산은 최소분산이 되지 못함

-결론적으로, 자기상관이나 이분산이 있음에도 불구하고 보통최소자승법으로 회귀계수를 추정하면 편의는 없으나 효율적인 추정량을 얻지 못하고 통계적 추론에서도 문제가 발생

(3)일반화최소자승법

-고전적 회귀모형에서 교란항에 대한 기본가정이 충족되지 않을 경우 모형을 기존가정이 충족될 수 있도록 변환하여 최소자승법으로 추정하면 최량불편추정량을 얻을 수 있음

-이를 일반화최소자승법(Generalized Least Squares: GLS) 또는 Aitken의 최소자승법이라고 하며 그 절차는 다음과 같음

첫째, $PP' = \Omega$라고 하면 $(P^{-1})'P^{-1} = \Omega^{-1}$이 되는데 여기서 P^{-1}를 L로 두면 아래의 명제에 의하여 $L'L = \Omega^{-1}$를 만족하는 비특이행렬(nonsingular matrix) P가 존재함

(명제) 어떠한 대칭양정부호행렬(symmetric positive definite matrix) Ω에 대해서 $PP' = \Omega$를 충족시키는 비특이행렬(nonsingular matrix) P가 존재함

둘째, 다음의 회귀모형에 L을 곱하여 변환함

$$Y = XB + U$$
$$E(UU') = \sigma^2\Omega$$

변환된 회귀모형은 다음과 같음

$$LY = LXB + LU$$

또는 $Y^* = X^*B + U^*$

셋째, 변환된 모형의 교란항의 평균과 분산을 구함

(평균) $E(U^*) = E(LU) = LE(U) = 0$

(분산) $E\left(U^*U^{*\prime}\right) = Var(LU) = E(LUU'L) = \sigma^2 L\Omega L' = \sigma^2 LL^{-1}L^{-1\prime}L' = \sigma^2 I_n$

$\because L^{-1}L^{-1\prime} = \Omega \leftarrow L'L = \Omega^{-1}$

–변환된 모형의 교란항 평균은 0이고 분산은 자기상관이 되어 있지 않으며 동분산의 조건을 만족하므로 변환된 모형을 최소자승법으로 추정하면 BLUE를 얻을 수 있는데 이러한 방법을 일반화최소자승법(GLS)이라고 함

넷째, GLS 추정량은 변환된 모형을 OLS로 추정하면 구할 수 있음

$$\hat{B}_G = (X^{*\prime}X^{*})^{-1}X^{*\prime}Y^{*}$$

$$= (X'L'LX)^{-1}X'L'LY$$

$$= \left(X^{-1}L^{-1}L^{-1\prime}X^{-1\prime}\right)X'L'LY$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

교란항의 분산 및 회귀계수의 분산에 대한 추정량은 다음과 같음

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{e'\Omega^{-1}e}{n-k}$$

$$Var\left(\hat{B}_G\right) = \hat{\sigma}_u^2\ (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$