11주차 2차시 : 자기상관(해결책)

1. 자기상관

(3) 해결책

1.자기상관

(3)해결책

-원자료(original data)를 적당한 방법으로 변환시켜 고전적 회귀모형의 기본 가정에 맞도록 한 후 OLS로 추정하면 됨

-그러면 원자료를 어떻게 변환시킬 것인가?

-이에 대한 단서를 찾기 위하여 교란항이 1차 자기상관이 있을 경우 교란항의 분산-공분산행렬(variance-covariance matrix)은 어떻게 생겼는지를 살펴봄

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

단, $E(e_t = 0), E(e_t e_t') = \sigma_e^2 I_n, E(u_{t-1} e_t) = 0$

-위 식을 1차 차분방정식(difference equation)이라 하는데 차분방정식의 해를 구하는 방법 중 하나로 연속적인 대입방법(successive substitution)이 있음

-연속적인 대입을 통해 차분방정식을 풀어보면 다음과 같음

$$
\begin{aligned}
u_t &= \rho u_{t-1} + e_t \\
&= \rho(\rho u_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 (e_{t-2} + \rho u_{t-3}) \\
&\quad \cdot \\
&= e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \cdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i e_{t-i}
\end{aligned}
$$

-위 식을 이용하여 u_t의 분산을 구해보면 다음과 같음

$$
\begin{aligned}
Var(u_t) &= \sigma_e^2 + \rho^2 \sigma_e^2 + \rho^4 \sigma_e^2 + \cdots \\
&= \sigma_e^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \cdots) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho^2} \\
&= \sigma_u^2
\end{aligned}
$$

$-u_t$와 $u_{t-j}(j = 1,2,3,\dots,s)$의 공분산을 구해보면 다음과 같음

$$Cov(u_t u_{t-1}) = \rho\sigma_e^2 + \rho^3\sigma_e^2 + \rho^5\sigma_e^2 + \cdots$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho\sigma_u^2$$

$$Cov(u_t u_{t-2}) = \rho^2\sigma_e^2 + \rho^4\sigma_e^2 + \rho^6\sigma_e^2 + \cdots$$
$$= \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho^2\sigma_u^2$$

.

.

$$Cov(u_t u_{t-s}) = \rho^s\sigma_e^2 + \rho^{(s+2)}\sigma_e^2 + \rho^{(s+4)}\sigma_e^2 + \cdots$$
$$= \frac{\rho^s}{1-\rho^2}\sigma_e^2$$
$$= \rho^s\sigma_u^2$$

-교란항의 분산-공분산 행렬은 다음과 같음

$$E(UU') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & E(u_1u_3) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & E(u_2u_3) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & E(u_nu_3) & \cdots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & . & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_e^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{n-1}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{n-2}}{1-\rho^2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\rho^{n-1}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{n-2}}{1-\rho^2}. & \cdots & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_e^2\ \Omega$$

–위 Ω로부터 다음과 같은 Ω 역행렬을 구할 수 있음(이는 $\Omega\Omega^{-1} = I$임을 통해 확인할 수 있음)

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & . & . & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & . & . & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

–위 식으로부터 다음의 L행렬을 구할 수 있음(이는 $L'L = \Omega^{-1}$임을 통해 확인할 수 있음)

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

-L을 이용하여 원래자료를 변환시키면 종속변수 및 독립변수를 다음과 같이 변환할 수 있는데 이를 Paris-Winstern 변환이라고 함

$$y_1^* = \sqrt{1-\rho^2}y_1$$

$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}(t \geq 2)$$

$$x_1^* = \sqrt{1-\rho^2}x_1$$

$$x_t^* = x_t - \rho x_{t-1}(t \geq 2)$$

-다음의 모형을 예로 들어 원자료를 변환시키는 방법을 살펴보면

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad ⓐ$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t$$

-먼저, ⓐ식을 한 기간 이전의 식으로 표현하면 다음과 같음

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t-1} + u_{t-1}$$

-위 식의 양변에 ρ를 곱한 후 ⓐ식에서 빼면 다음 식과 같게 되는데 이를 Cocharane-Orcutt 변환(transformation)이라고 함

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_{2t-1} - \rho X_{2t-1}) + \beta_3(X_{3t} - \rho X_{3t-1}) + \epsilon_t$$
$$\epsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

-위 식에서 $\beta_1^* = \beta_1(1-\rho)$라 표기하면 다음 식과 같음

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_{2t}^* + \beta_3 X_{3t}^* + \epsilon_t$$

단, $Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, X_{2t}^* = (X_{2t} - \rho X_{2t-1}), X_{3t}^* = (X_{3t} - \rho X_{3t-1})$

-위 식의 추정방법은 두 가지임

① ρ를 알고 있는 경우

-$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}, X_{2t}^* = (X_{2t} - \rho X_{2t-1}), X_{3t}^* = (X_{3t} - \rho X_{3t-1})$ 를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 GLS추정량이라고 함

① ρ의 값이 알려져 있지 않을 경우

-ρ을 추정한 후 자료를 변환하고 OLS를 적용하는데 ρ값을 추정하는 방법에는 여러 가지가 있음

(1) Durbin의 2단계 추정법

-1단계 : Cochrane-Orcutt 변환(transformation) 식을 다시 정리하면 다음 식이 되는데 이를 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$를 얻음

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \beta_1^* + \beta_2 X_{2t} - \beta_2 \rho X_{2t-1} + \beta_3 X_{3t} - \beta_3 \rho X_{3t-1} + \varepsilon_t$$

-2단계 : 1단계에서 구한 $\hat{\rho}$으로 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 FGLS(Feasible GLS)추정량이라고 함

(2) Cochrane-Orcutt의 2단계 절차

-1단계 : ⓐ식을 OLS로 추정하여 $\hat{u}_t$을 얻고, 다음으로 $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + e_t$의 회귀모형을 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$을 얻음

- 2단계 : $\hat{\rho}$을 이용하여 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하면 되는데 이를 FGLS추정량이라고 함

(3) Cochrane-Orcutt의 반복절차

-1단계 : ⓐ식을 OLS로 추정하여 $\hat{u}_t$을 구한다

-2단계 : 1단계에서 추정된 잔차를 이용하여 다음 식을 OLS로 추정하여 $\hat{\rho}$을 구하는데 이를 ρ의 1단계 추정치($\hat{\rho}_1$)라고 함

$$\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + e_t$$

-3단계 : 2단계에서 추정된 $\hat{\rho}$을 이용하여 ρ를 알고 있는 경우처럼 $Y_t^*, X_{2t}^*, X_{3t}^*$를 구한 후 OLS로 추정하여 $\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \hat{\beta}_3^*$을 구함

-4단계 : $\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \hat{\beta}_3^*$을 이용하여 다음의 새로운 잔차를 구함

$$\hat{u}_t^* = Y_t - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_{2t} - \hat{\beta}_3^* X_{3t}$$

-5단계 : 새로운 잔차를 이용하여 다음 식을 OLS로 추정하여 새로운 1차 자기상관계수 $\hat{\rho}$을 구하는데 이를 ρ의 2단계 추정치($\hat{\rho}_2$)라고 함

$$\hat{u}_t^* = \rho\hat{u}_{t-1}^* + e_t^*$$

-6단계 : 위의 과정을 다음의 수렴조건이 충족될 때까지 반복함

$$|\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_{j+1}| < 0.005$$

단, 0.005를 수렴한계치(convergence limit)라고 함