

14주차 3차시 : 확률과정(안정성, acf, pacf, 교차 및 시차상관계수)

2. 안정성 및 Wold Decomposition

3 자기상관함수(acf) 및 편자기상관함수(pacf)

4. 교차상관계수 및 시차상관계수

2.안정성 및 Wold Decomposition

(1) 안정성

- 다음의 3조건을 만족하는 확률과정, y_t 를 안정적 시계열(covariance-stationary)이라 함
 - 시계열의 평균이 일정 즉, $E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu$ for $\forall t, t-s$
 - 시계열의 분산이 일정 즉, $E[(y_t - \mu)^2] = E[(y_{t-s} - \mu)^2] = \sigma_y^2$
 - 시계열의 공분산이 일정 즉, $E[(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)] = E[(y_{t-j} - \mu)(y_{t-j-s} - \mu)] = \gamma_s$
- 시계열의 평균이 일정하지 않을 경우를 homogeneous non-stationarity라 하며, 이러한 경우는 원계열을 차분(differencing)을 해주면 안정시계열이 됨
 - 차분=1:원계열의 수준이 시간에 따라 다를 경우/차분=2 : 원계열의 수준과 기울기가 시간에 따라 다를 경우
- 시계열의 분산이 일정하지 않을 경우를 non-stationary variance라 하며, 이러한 경우 원계열에 자연대수(natural logarithm)를 취하면 됨
- 일반적으로 성장률의 개념으로 생각하는 시계열(예 : GDP, Money, Price)은 자연대수를 취하는데 이러한 시계열은 자연대수를 취한 후 차분여부를 결정해야 함

(예) 임의보행과정의 불안정성

$$\begin{aligned}y_t &= y_{t-1} + e_t \\ &= y_{t-2} + e_{t-1} + e_t \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= y_0 + \sum_{j=1}^t e_j\end{aligned}$$

만약에 y_0 를 주어진 것으로 가정하면, 즉 $y_0 = 0$ 이라 하면

$$E(y_t) = 0$$

$$E(y_t^2) = E[(e_t + e_{t-1} + \cdots e_1)(e_t + e_{t-1} + \cdots e_1)] = t\sigma_e^2 \text{ (dependent on } t\text{)}$$

$$E(y_t y_{t-1}) = E[(e_t + e_{t-1} + \cdots e_1)(e_{t-1} + e_{t-2} + \cdots e_1)] = (t-1)\sigma_e^2 \text{ (dependent on } t\text{)}$$

(2) Wold Decomposition

- 모든 안정적인 확률과정은 다음과 같이 확정적 요소(deterministic component)와 확률적 요소(stochastic component)의 합으로 나타낼 수 있음

$$Y_t = \mu + e_t + \Psi_1 e_{t-1} + \Psi_2 e_{t-2} + \dots \text{ 단, } e_t \sim \text{i.i.d}(0, \sigma^2)$$

(평균) (현재 및 과거의 충격)

- 현재의 Y_t 는 평균(μ)과 현재 및 과거의 충격(shock)으로 나타낼 수 있는데 이를 Wold Representation이라고 함
- 충격의 백색잡음과정의 가정 외에 $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2 + \psi_1^2 \sigma^2 + \dots = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2 < \infty$ (finite variance)를 가정

3. 자기상관함수 및 편자기상관함수

- 안정적인 확률과정 y_t 의 평균, 분산, 자기공분산, 자기상관, 편자기상관은 다음과 같이 추정

- 표본평균 : $\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$

- 표본분산 : $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2$

- 표본자기공분산 : $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})$

- 표본자기상관함수 : $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

- 표본편자기상관함수 : $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_k$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_j}, \quad k=2,3,\dots$$

$$\text{단, } \hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j}, \quad k=3,4,\dots, j=1,2,3,\dots,k-1$$

- K 이외의 모든 시차를 갖는 관측치($y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$) 영향력을 배제한 가운데 특정의 두 관측치 y_t 와 y_{t-1} 가 얼마나 관련이 있는 지 나타내는 척도로 회귀계수가 편자기상관함수가 됨
- 시차 k의 편자기상관계수는 다음 식에서 k번째 회귀계수 ϕ_{kk} 를 의미함
 - $y_t = \phi_{k1}y_{t-1} + \phi_{k2}y_{t-2} + \dots + \phi_{kk}y_{t-k} + e_t$ 즉, AR(1) : $\phi_{11} = \phi_1$, AR(2) : $\phi_{22} = \phi_2$
- 즉, $\phi_{kk} = \text{corr}(y_t, y_{t-k} | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1})$ 으로 $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k+1}$ 의 성분을 제거시킨 후 y_t 와 y_{t-k} 의 상관계수를 의미함

4. 교차상관계수 및 시차상관계수

- 교차 및 시차상관계수는 t기의 특정(기준)변수 x의 값(x_t)과 t+k기에 관찰된 y값(y_{t+k}) 간의 상관관계의 정도를 나타냄
- $k=0$ 인 경우 즉, γ_0 인 경우를 교차상관계수(cross correlation coefficient)라고 하고, $k \neq 0$ 인 경우를 시차상관계수(leads and lags correlation)라고도 함

$$\gamma_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$$

- 교차상관계수 해석
 - $\gamma_0 > 0$: 두 변수들이 서로 같은 방향으로 변화(pro-cyclical:경기순응)
 - $\gamma_0 < 0$: 두 변수들이 서로 반대 방향으로 변화(counter-cyclical:경기역행)
 - $\gamma_0 = 0$: 두 변수들이 서로 경기중립적

- 시차상관계수 해석
 - γ_k 의 값이 최대가 되는 시차 k가 양(+)이면 해당변수 y_t 는 x_t 의 후행지표
 - γ_k 의 값이 최대가 되는 시차 k가 음(-)이면 해당변수 y_t 는 x_t 의 선행지표
 - γ_k 의 값이 최대가 되는 시차 k가 0이면 해당변수 y_t 는 x_t 와 동행지표

연도	2001	.	.	2010
GDP(x_t)	x_1	.	.	x_{10}
해당변수(y_t)	x_1	.	.	x_{10}

- 만약에 $k=2$ 에서 γ_k 의 값이 최대이면, $\gamma_2 = x_1y_3 + x_2y_3 + \dots + x_8y_{10}$ (y가 GDP 뒤따라 변하는 후행지표)
- 만약에 $k=-2$ 에서 γ_k 의 값이 최대이면, $\gamma_{-2} = x_3y_1 + x_4y_2 + \dots + x_{10}y_8$ (y가 GDP보다 먼저 변하는 선행지표)

(실증분석 예 : 우리나라 경기변동의 실증분석)

- 표준편차 : 변동성(volatility) 측정
- 상대적 표준편차 : GDP에 대한 상대적 변동성 측정
- 자기상관계수(autocorrelation) : 경기변동의 지속성 측정
- 교차상관계수(cross correlation): GDP와의 동행성(comovement) 측정
 - 경기순응적(pro-cyclical) / 경기중립적(a-cyclical) / 경기역행적(counter-cyclical)
- 시차상관계수(leads and lags correlation):GDP에 대한 선행성 측정
 - 경기선행적(leading) / 경기동행적(coincident) / 경기후행적(lagging)

○ 대상기간 : 1970: I ~1997: III (111분기)

주요변수의 변동폭 및 시차상관계수

변수	표준편차	상대적 표준편차	GDP와의 시차상관계수									
			-4	-3	-2	-1	0= γ_0	+1	+2	+3	+4	
GDP	2.19	1.00	0.20	0.33	0.51	0.68	1.00	0.68	0.51	0.33	0.20	
소비	1.01	0.46	0.01	0.16	0.30	0.50	<u>0.70</u>	0.66	0.59	0.41	0.27	
투자	8.01	3.65	0.12	0.33	0.53	0.67	<u>0.70</u>	0.62	0.51	0.40	0.20	
수출	7.17	3.27	0.27	0.37	<u>0.44</u>	0.43	0.35	0.24	0.06	-0.11	-0.25	
수입	5.97	2.72	-0.02	0.18	0.44	0.65	<u>0.66</u>	0.58	0.51	0.29	0.22	
무역수지	2.83	1.29	<u>0.40</u>	0.37	0.31	0.19	0.12	0.00	-0.13	-0.22	-0.37	
자본스톡	0.88	0.40	0.15	<u>0.20</u>	0.16	0.15	0.09	0.05	0.02	-0.02	-0.05	
노동투입	1.59	0.72	0.14	0.17	0.23	0.29	<u>0.35</u>	0.30	0.27	0.15	0.00	
교역조건	5.61	2.56	0.36	0.41	0.50	<u>0.52</u>	0.48	0.36	0.25	0.08	-0.03	