제3강 ARIMA 모형

1. AR(p) 모형
2. MA(q) 모형
3. ARMA(p,q) 모형

(1) 모형

AR(1) $y_t = \emptyset_1 y_{t-1} + e_t\ ,\ e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

AR(p) $y_t = \mu + \emptyset_1 y_{t-1} + \emptyset_2 y_{t-2} + \cdots + \emptyset_p y_{t-p} + e_t\ ,\ e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

(2) AR(1)

① ACF

– 반복적인 대입을 통해 y_t를 교란항의 함수로만 표현해 보면($y_0 = 0$)

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + e_t,\ \ e_t \sim (0, \sigma_e^2) \\
&= \phi^2 y_{t-2} + \phi e_{t-1} + e_t \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j e_{t-j}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{y_t}$의 평균, 분산 및 공분산을 구해 보면 다음과 같음

$$E(y_t) = 0$$

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= \sigma_e^2 + \phi^2\sigma_e^2 + \phi^4\sigma_e^2 + ... \\ &= \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \\ &\equiv \gamma_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(y_t y_{t-1}) &= E(y_t y_{t-1}) = E[(e_t + \phi e_{t-1} + ...)(e_{t-1} + \phi e_{t-2} + ...)] \\ &= \phi\sigma_e^2 + \phi^3\sigma_e^2 + ... \\ &= \frac{\phi}{1-\phi^2}\sigma_e^2 \equiv \gamma_1 \end{aligned}$$

$$Cov(y_t y_{t-k}) = \frac{\phi^k}{1-\phi^2}\sigma_e^2 \equiv \gamma_k$$

- 따라서 다음과 같이 $\boldsymbol{\rho_0}$, $\boldsymbol{\rho_1},\cdots,\boldsymbol{\rho_k}$를 구할 수 있음

$$\therefore\ \rho_0 \equiv \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi$$

.

$$\rho_k \equiv \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$$

- 이를 그래프로 나타낸 것을 상관도(correlogram)라 하며 이를 이용하여 시계열의 안정성여부를 판단할 수 있음
- 시계열이 안정적이면(ø→0), ACF는 급격하게 0을 향해 감소하고
  시계열이 불안정적이면(ø→1), ACF는 0을 향해 천천히 감소함

② PACF

- k 이외의 모든 시차를 갖는 관측치(y_{t-1}, $y_{t-2}, \cdots, y_{t-k+1}$)의 영향력을 배제한 가운데 특정의 두 관측치, y_t 및 y_{t-k}가 얼마나 관련이 있는 지 나타내는 척도로 회귀계수가 편자기상관함수가 됨
- 즉, $\phi_{kk} = corr(y_t, y_{t-k} \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-k+1})$
- 시차 k의 편자기상관계수는 다음 식에서 k번째 회귀계수 $\emptyset_{kk}$를 의미함

$$y_t = \phi_{k1} y_{t-1} + \phi_{k2} y_{t-2} + \dots + \phi_{kk} y_{t-k} + e_t$$

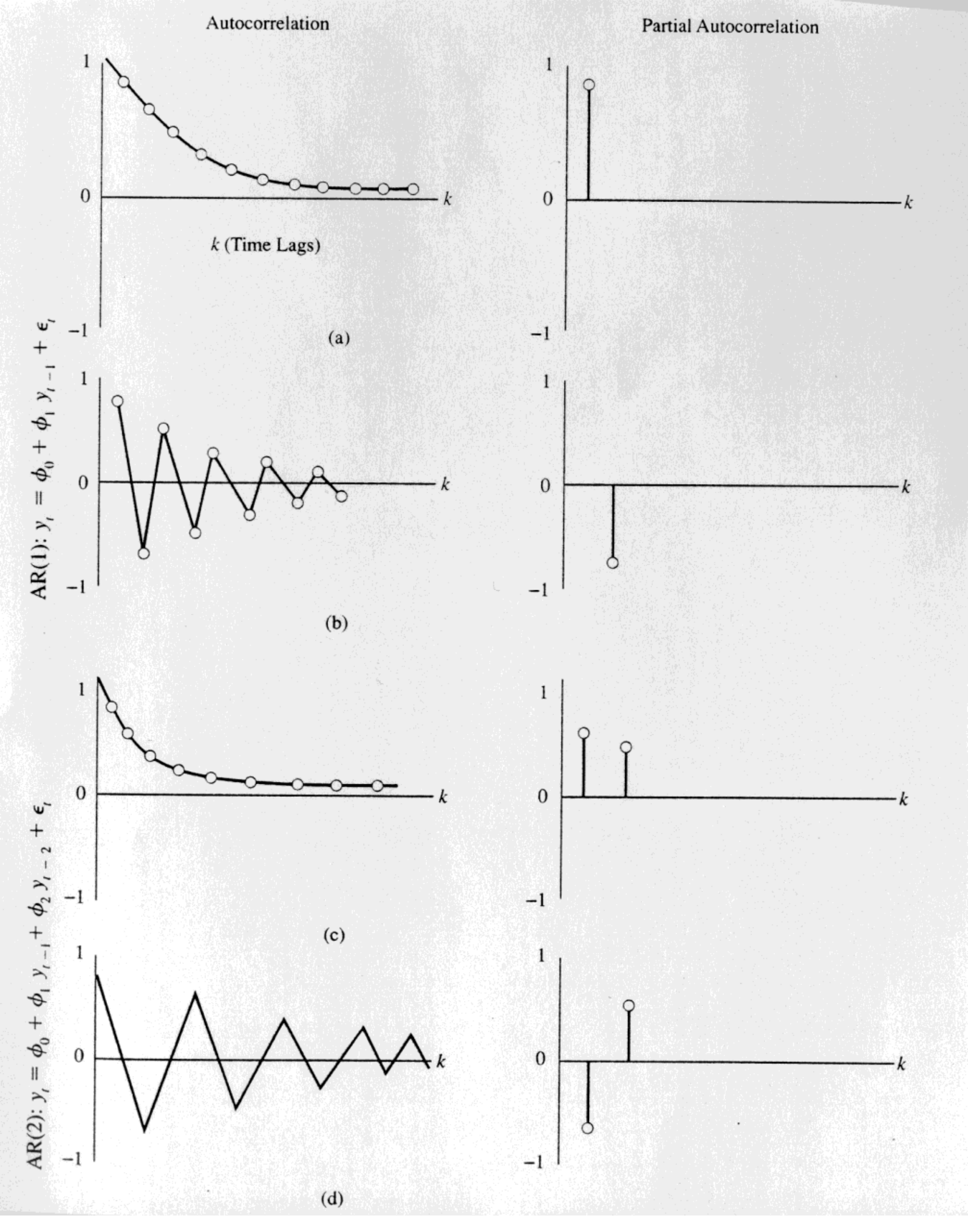
즉, AR(1): $\phi_{11} = \phi_1$

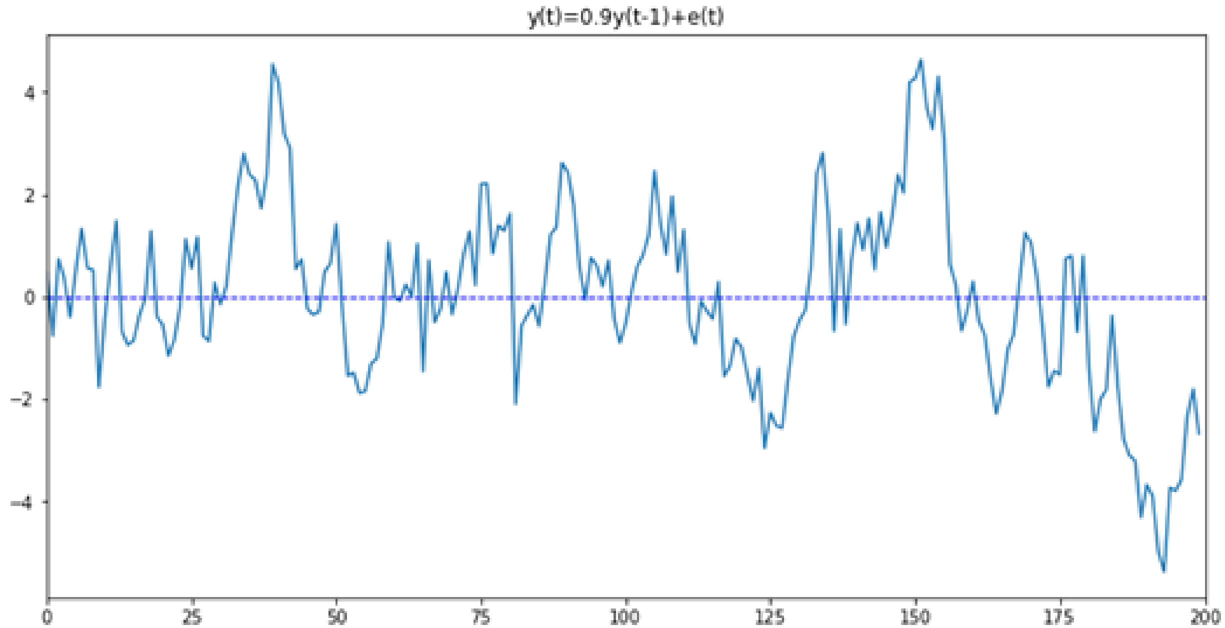
AR(2): $\phi_{22} = \phi_2$

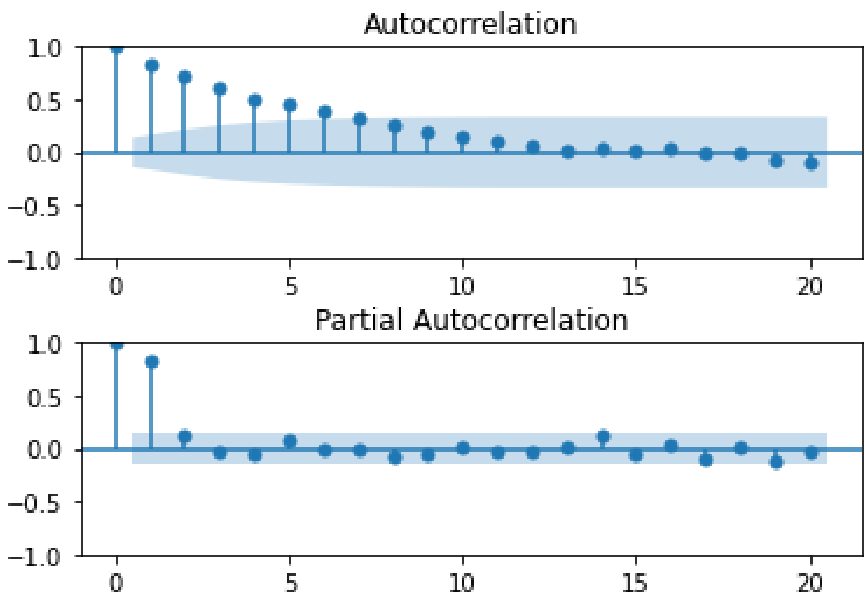
③ 식별

- ACF가 점진적으로 감소하면 불안정시계열이므로 원계열을 차분하여 안정시계열로 만들어 줌

- ACF가 0을 향해 감소하고 PACF는 1-2개 정도만 통계적으로 유의하면 AR모형




y(t)=0.9y(t-1)+e(t)


Autocorrelation
Partial Autocorrelation

④ 최적 모형의 선정(AIC 기준)

- ACF 및 PACF를 이용하여 모형을 식별할 수도 있지만 최적 모델을 선정하는 기준으로 적합성을 측정해 주는 AIC(Akaike Information Criterion) 또는 SBC(Schwarz-Bayesian Criterion) 등이 있음
- AIC 및 SBC는 다음과 같이 계산되는데 작은 값일수록 모형의 적합도가 높음을 나타냄

$$AIC = 2*k - 2*\ln(L^*)$$

$$SBC = k*\ln(n) - 2*\ln(L^*)$$

단, k는 추정계수의 개수, n은 관측치 수, $\ln(L^*)$은 최적화된 log likelihood의 값

⑤ 추정

- 일반적으로 AR 모형은 최소자승법으로 추정하고 MA 모형은 비선형최소자승법으로 추정
- 두 모형 모두 최우법으로 추정하기도 함

```
                               SARIMAX Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   No. Observations:                  200
Model:                 ARIMA(1, 0, 0)   Log Likelihood                -280.677
Date:                Mon, 25 Mar 2024   AIC                            567.354
Time:                        16:09:13   BIC                            577.249
Sample:                             0   HQIC                           571.359
                                - 200
Covariance Type:                  opg
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -0.0096      0.435     -0.022      0.982      -0.862       0.843
ar.L1          0.8340      0.041     20.265      0.000       0.753       0.915
sigma2         0.9636      0.092     10.428      0.000       0.783       1.145
===================================================================================
Ljung-Box (L1) (Q):                   1.71   Jarque-Bera (JB):                 2.94
Prob(Q):                              0.19   Prob(JB):                         0.23
Heteroskedasticity (H):               1.19   Skew:                            -0.27
Prob(H) (two-sided):                  0.47   Kurtosis:                         3.26
===================================================================================
```

$-y_t = \mu + \phi y_{t-1} + e_t$는 $(1-\phi L)y_t = \mu + e_t$이므로 $y_t = \frac{\mu}{1-\phi} + (1-\phi L)^{-1} e_t$로 나타내면 AR(1)에서 추정된 상수항 $\hat{c} = \frac{\hat{\mu}}{1-\hat{\phi}}$이므로 $\hat{\mu} = \hat{c}(1-\hat{\phi})$이 됨

$-$따라서, $\hat{\phi} = 0.8340$이고, $\hat{c} = -0.0096$이므로 $\hat{\mu} = -0.0096(1-0.8340) = -0.00159$이며, $\hat{\sigma}^2 = 0.9636$임

⑥ 모형의 검토

- 잔차의 독립성 검정 : Ljung-Box 검정 =>5% 유의수준에서 잔차가 독립적임

$$Q = T(T+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{T-k}\gamma_k^2 \sim \chi^2_{K-p-q}$$

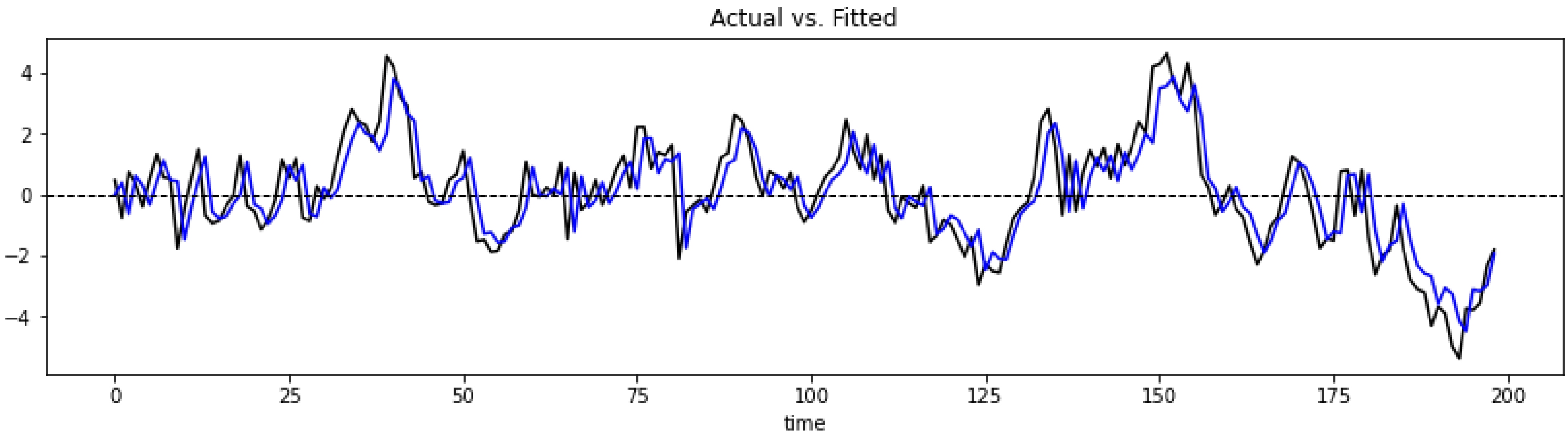
단, $K = Min(\frac{T}{2}, T^{1/3})$

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_k = 0$ (단, ρ_k (k=1,2,3...K)는 잔차의 acf임)

- 이분산여부 검정 : 5% 유의수준에서 이분산이 없음
- 정규분포 여부 : Jarque-Bera 검정 : 5% 유의수준에서 정규분포를 함

Ljung-Box (L1) (Q):	1.71	Jarque-Bera (JB):	2.94
Prob(Q):	0.19	Prob(JB):	0.23
Heteroskedasticity (H):	1.19	Skew:	-0.27
Prob(H) (two-sided):	0.47	Kurtosis:	3.26

⑦ 실제치 및 추정치



⑧ 예측

- 추정된 AR(p)모형을 이용하면 미래의 값에 대한 예측치를 도출할 수 있는데 AR(1)의 경우를 예를 들어 n시점까지의 정보를 바탕으로 k기 이후 즉, (n+k)기에 대한 예측치를 구하는 방법은 다음과 같음

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + e_t$$

- 위 식에서 (n+1)기(k=1)의 y 즉, y_{n+1}은 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$y_{n+1} = \mu + \phi y_n + e_{n+1}$$

- 따라서 n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기에 대한 예측치를 구하면 다음과 같음.

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\mu} + \hat{\phi} y_n \quad \text{또는} \quad E[y_{n+1} \mid I_t] = \mu + \phi y_n \leftarrow E[e_{n+1} \mid I_t = 0]$$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 : $\begin{aligned} & y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t] \\ &= \mu + \phi y_n + e_{n+1} - (\mu + \phi y_n) \\ &= e_{n+1} \end{aligned}$

- 예측오차 분산 : $\begin{aligned} & Var(y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t]) \\ &= Var(e_{n+1}) \\ &= \sigma_e^2 \end{aligned}$

- 유사한 방법으로 n시점에서의 (n+2)기에 대한 예측치는 다음과 같음

$$\hat{y}_{n+2} = \hat{\mu} + \hat{\phi} y_{n+1}$$

$$= \hat{\mu} + \hat{\phi}(\hat{\mu} + \hat{\phi} y_n)$$

$$= (\hat{\phi} + 1)\hat{\mu} + \widehat{\phi^2} y_n$$

또는 $E[y_{n+2} \mid I_t] = \mu + \phi E[y_{n+1} \mid I_t] \leftarrow E[e_{n+2} \mid I_t = 0]$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+2)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 : $y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t]$

$$= \mu + \phi y_{n+1} + e_{n+2} - \mu - \phi E[y_{n+1} \mid I_t]$$
$$= \phi (y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t]) + e_{n+2}$$
$$= \phi e_{n+1} + e_{n+2}$$

- 예측오차 분산 : $Var(y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t])$

$$= Var(\phi e_{n+1} + e_{n+2})$$
$$= (\phi^2 + 1)\sigma_e^2$$

○ 일반적으로 n시점에서 h기 이후 즉, (n+h)기에 대한 예측치는 다음과 같음

$$\hat{y}_{n+h} = (\hat{\phi}^{h-1} + \hat{\phi}^{h-2} + \ldots + 1)\hat{\mu} + \hat{\phi}^h y_n$$

(점 예측치)

n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 예측치 및 (n+2)기에 대한 예측치를 구해보면 각각 다음과 같다.

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{\mu} + \hat{\phi} y_t = -0.0096 + (0.8340)(-2.6804) = -2.2447$$

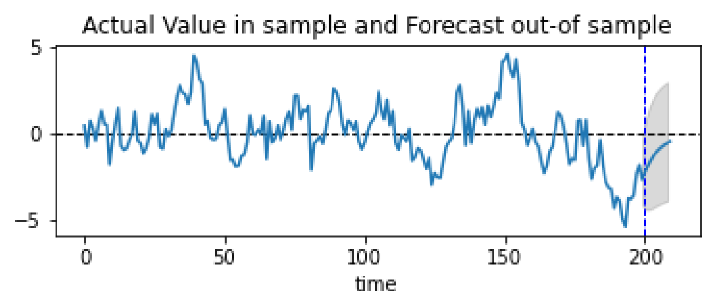
$$\hat{y}_{t+2} = \hat{\mu} + \hat{\phi}\hat{y}_{t+1} = \hat{\mu} + \hat{\phi}(\hat{\mu} + \hat{\phi} y_n) = -0.0096 + (0.8340)(-2.2447) = -1.8821$$

	0
0	-2.23717
1	-1.86748
2	-1.55915
3	-1.30199
4	-1.0875
5	-0.908619
6	-0.759421
7	-0.634985
8	-0.5312
9	-0.44464

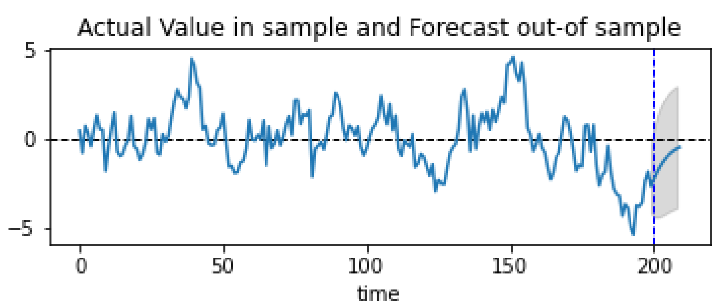
(구간예측)

한편, n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 95% 구간예측 및 (n+2)기에 대한 95% 구간예측을 구해보면 각각 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&95\%\, PI(y_{t+1}) \\
&= \hat{y}_{t+1} \pm (1.96)\sqrt{\hat{\sigma}^2} \\
&= -2.2447 \pm (1.96)\sqrt{0.9636} \\
&= [-4.1686,\ -0.3208]
\end{aligned}
$$



	0	1
0	-4.16114	-0.313196
1	-4.3728	0.637837
2	-4.39954	1.28124
3	-4.35384	1.74986
4	-4.27819	2.10319
5	-4.19243	2.37519
6	-4.10648	2.58764
7	-4.02535	2.75538
8	-3.95136	2.88896
9	-3.88537	2.99609



(1) 모형

MA(1) $y_t = e_t + \theta e_{t-1}$, $e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

MA(q) $y_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} - \cdots + \theta_q e_{t-q}$, $e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

(2) MA(1)

① ACF

- y_t의 평균, 분산, 공분산 및 ACF를 구해 보면 다음과 같음

$$E(y_t) = 0$$

$$Var(y_t) = \sigma_e^2 + \theta^2 \sigma_e^2 = (1+\theta^2)\sigma_e^2 \equiv \gamma_0$$

$$Cov(y_t y_{t-1}) = E(y_t y_{t-1}) = E[(e_t + \theta e_{t-1})(e_{t-1} + \theta e_{t-2})] = \theta \sigma_e^2 \equiv \gamma_1$$

$$Cov(y_t y_{t-2}) = E(y_t y_{t-2}) = E[(e_t + \theta e_{t-1})(e_{t-2} + \theta e_{t-3})] = 0 \equiv \gamma_2$$

$$\therefore \quad \rho_1 \equiv \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta}{1+\theta^2}$$

$$\rho_2 \equiv \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0$$

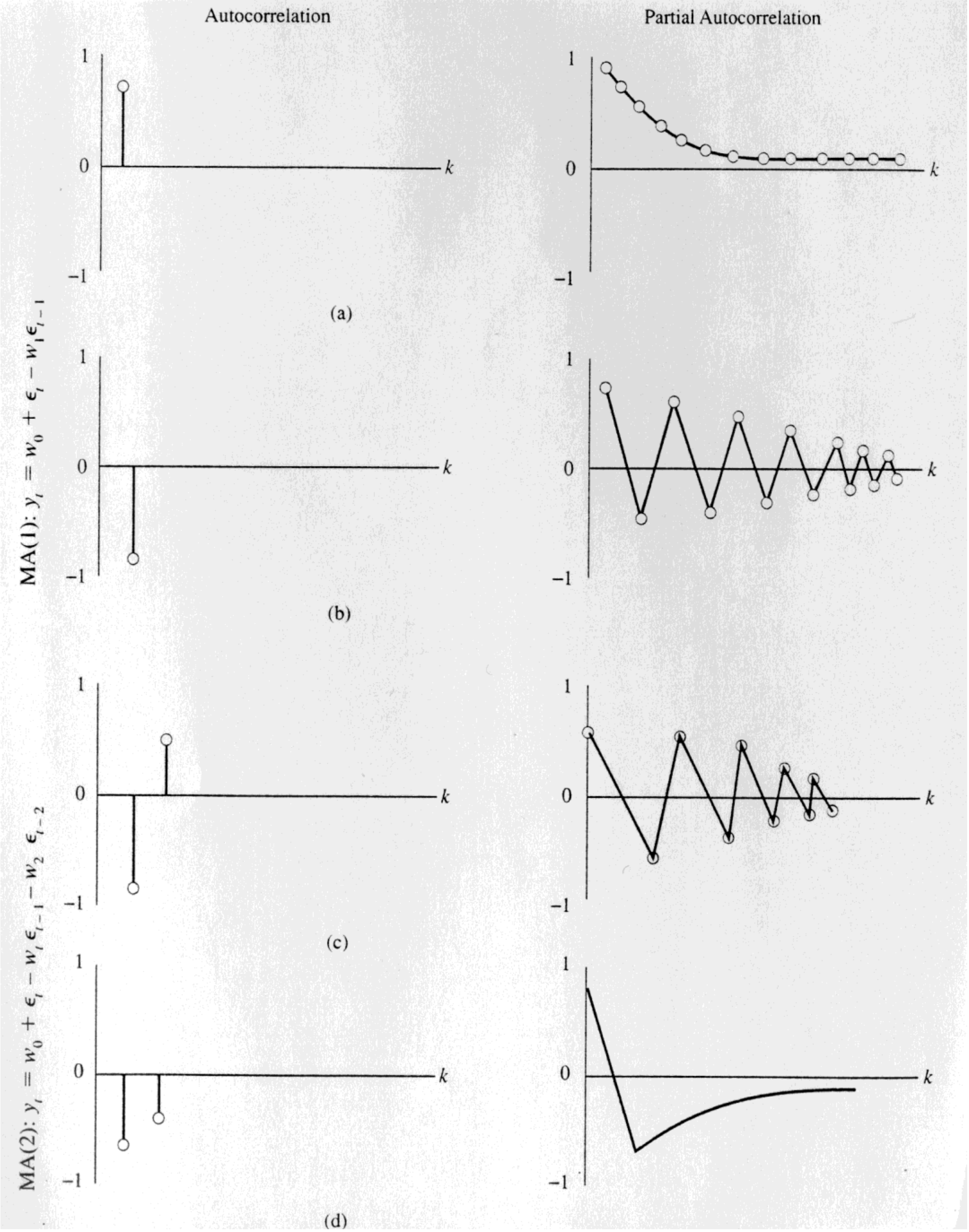
.

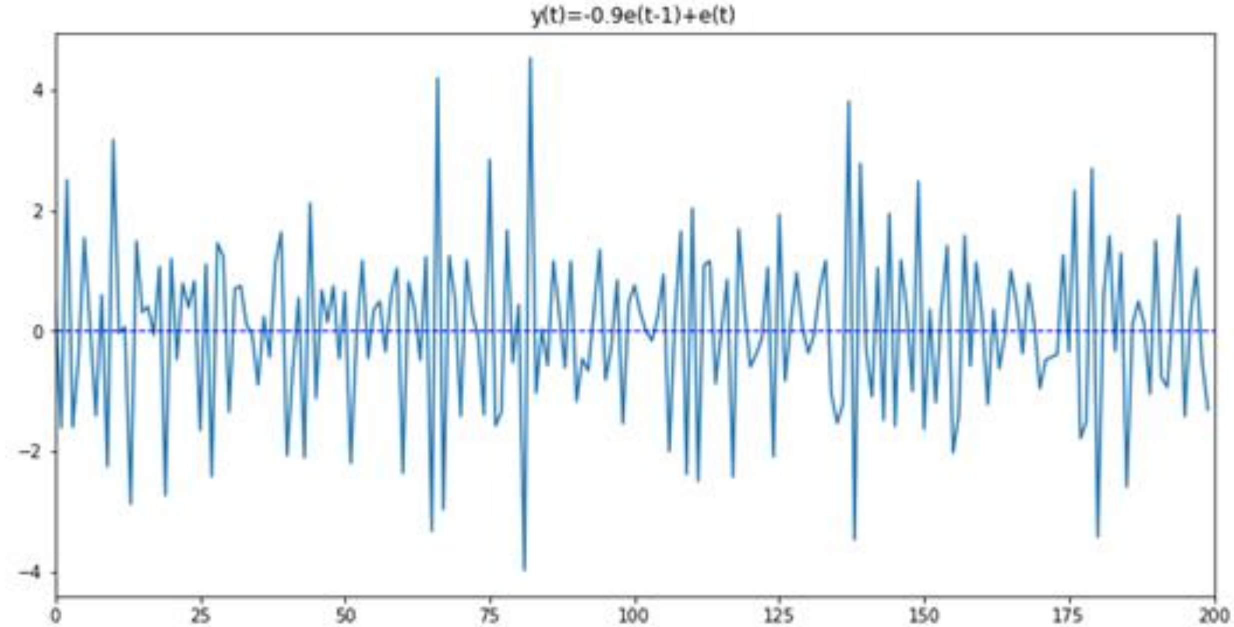
.

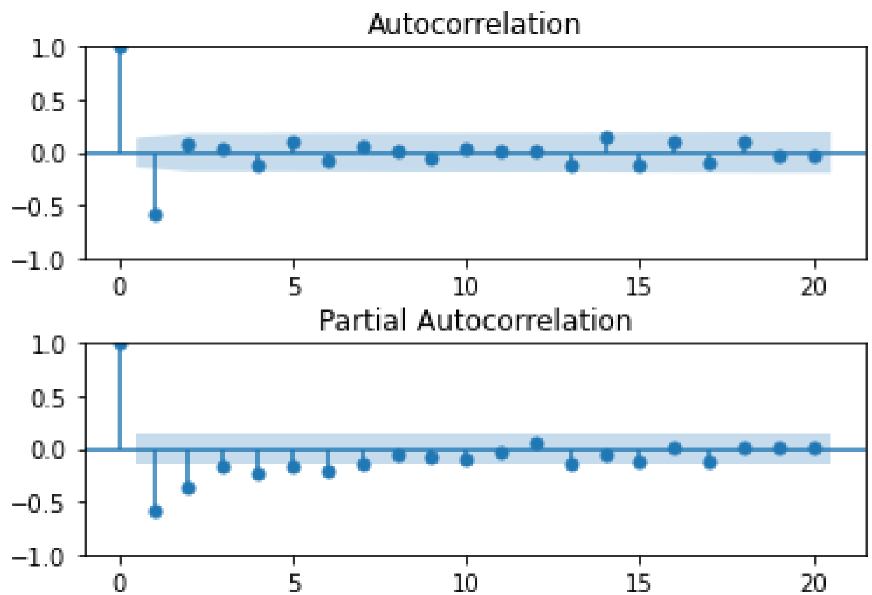
$$\rho_k = 0$$

② 식별

- PACF는 0을 향해 감소하고 ACF는 1 - 2개 정도만 통계적으로 유의하면 MA모형




y(t)=-0.9e(t-1)+e(t)
4
2
0
−2
−4
0
25
50
75
100
125
150
175
200


Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
Partial Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20

③ 추정

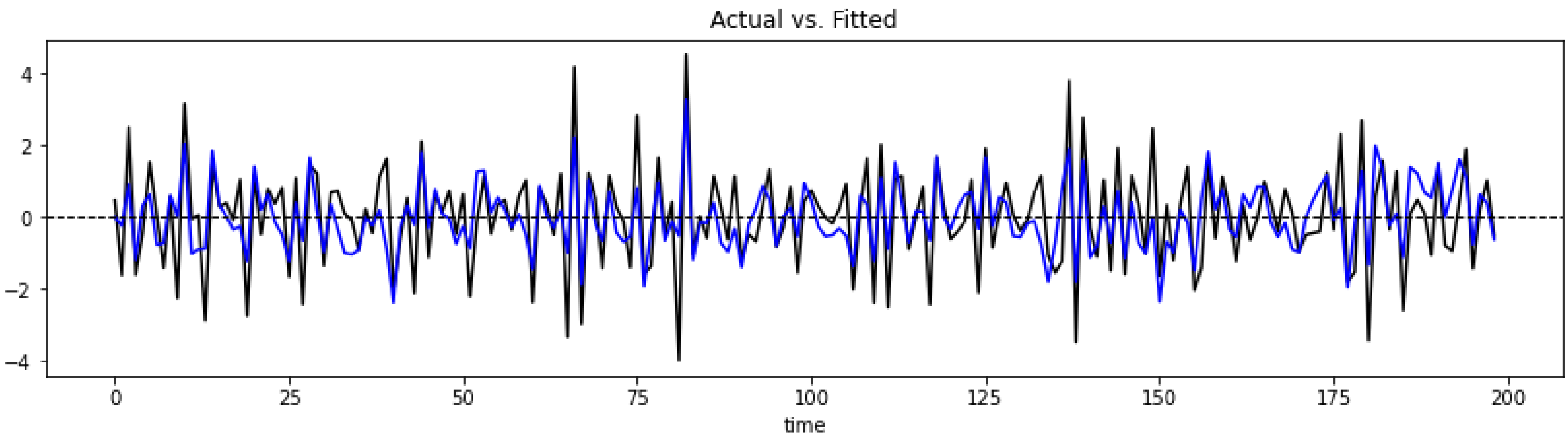
```
                           SARIMAX Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   No. Observations:                  200
Model:                 ARIMA(0, 0, 1)   Log Likelihood                -281.306
Date:                Mon, 25 Mar 2024   AIC                            566.611
Time:                        17:22:31   BIC                            573.208
Sample:                             0   HQIC                           569.281
                                - 200
Covariance Type:                  opg
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
ma.L1         -0.9465      0.028    -33.569      0.000      -1.002      -0.891
sigma2         0.9645      0.092     10.540      0.000       0.785       1.144
===================================================================================
Ljung-Box (L1) (Q):                   2.66   Jarque-Bera (JB):                 3.43
Prob(Q):                              0.10   Prob(JB):                         0.18
Heteroskedasticity (H):               1.17   Skew:                            -0.29
Prob(H) (two-sided):                  0.51   Kurtosis:                         3.28
===================================================================================
```

MA(1)의 추정결과 $\hat{\theta} = -0.9465$이고, $\hat{\sigma}^2 = 0.9645$이다.

④ 모형의 검토

- 잔차의 독립성 검정 : Ljung-Box 검정 => 5% 유의수준에서 잔차가 독립적임
- 이분산여부 검정 => 5% 유의수준에서 이분산이 없음
- 정규분포 여부 : Jarque-Bera 검정 => 5% 유의수준에서 정규분포를 함

⑤ 실제치 및 추정치



⑥ 예측

- 추정된 MAR(q)모형을 이용하면 미래의 값에 대한 예측치를 도출할 수 있는데 MA(1)의 경우를 예를 들어 n 시점까지의 정보를 바탕으로 k기 이후 즉, (n+k)기에 대한 예측치를 구하는 방법은 다음과 같음

$$y_t = e_t + \theta e_{n-1}$$

- 위 식에서 (n+1)기(k=1)의 y 즉, y_{n+1}은 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$y_{n+1} = e_{n+1} + \theta e_n$$

- 따라서 n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기에 대한 예측치를 구하면 다음과 같음.

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\theta}\,\hat{e}_n \quad \text{또는} \quad E[y_{n+1} \mid I_t] = \theta e_n \leftarrow E[e_{n+1} \mid I_t = 0]$$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 : $y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t]$
$= e_{n+1} + \theta e_n - \theta e_n$
$= e_{n+1}$

- 예측오차 분산 : $Var(y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t])$
$= Var(e_{n+1})$
$= \sigma_e^2$

- 유사한 방법으로 n시점에서의 (n+2)기에 대한 예측치는 다음과 같음

$y_{n+2} = e_{n+2} + \theta e_{n+1}$이므로

$\hat{y}_{n+2} = 0$

또는 $E[y_{n+2} \mid I_t] = 0 \leftarrow E[e_{n+2} \mid I_t = 0]$, $E[e_{n+1} \mid I_t = 0]$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+2)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 : $y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t]$
$= e_{n+2} + \theta e_{n+1}$

- 예측오차 분산 : $Var(y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t])$
$= Var(e_{n+2} + \theta e_{n+1})$
$= (1 + \theta^2)\sigma_e^2$

(점 예측치)

n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 예측치 및 (n+2)기에 대한 예측치를 구해보면 각각 다음과 같다.

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{\theta}\hat{e}_n = -0.9465(-1.311) = 1.2408$$

$$\hat{y}_{t+2} = 0$$

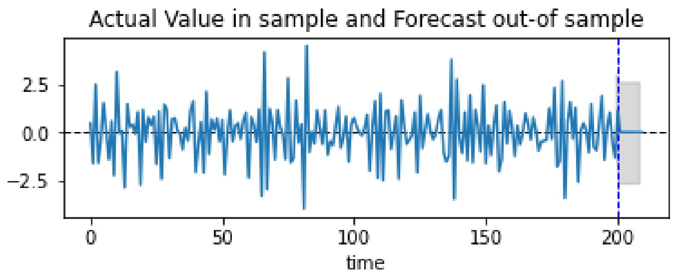
(구간예측)

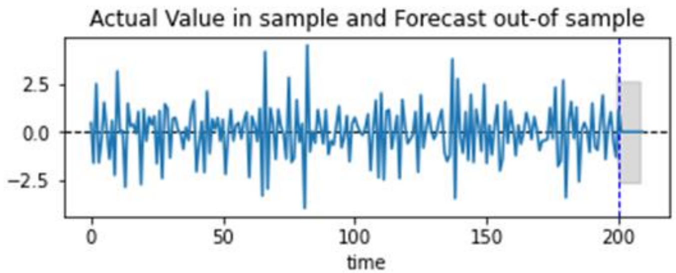
한편, n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 95% 구간예측 및 (n+2)기에 대한 95% 구간예측을 구해보면 각각 다음과 같다.

$$1.2408 \pm (1.96)\sqrt{0.9645} = [-0.684,\ 3.1656]$$

190	1.49261
191	-0.781341
192	-0.939519
193	0.429224
194	1.91127
195	-1.42547
196	0.227258
197	1.03418
198	-0.511865
199	-1.31108

	0	1
0	-0.774314	3.07543
1	-2.65037	2.65037
2	-2.65037	2.65037
3	-2.65037	2.65037
4	-2.65037	2.65037
5	-2.65037	2.65037
6	-2.65037	2.65037
7	-2.65037	2.65037
8	-2.65037	2.65037
9	-2.65037	2.65037





(1) 모형

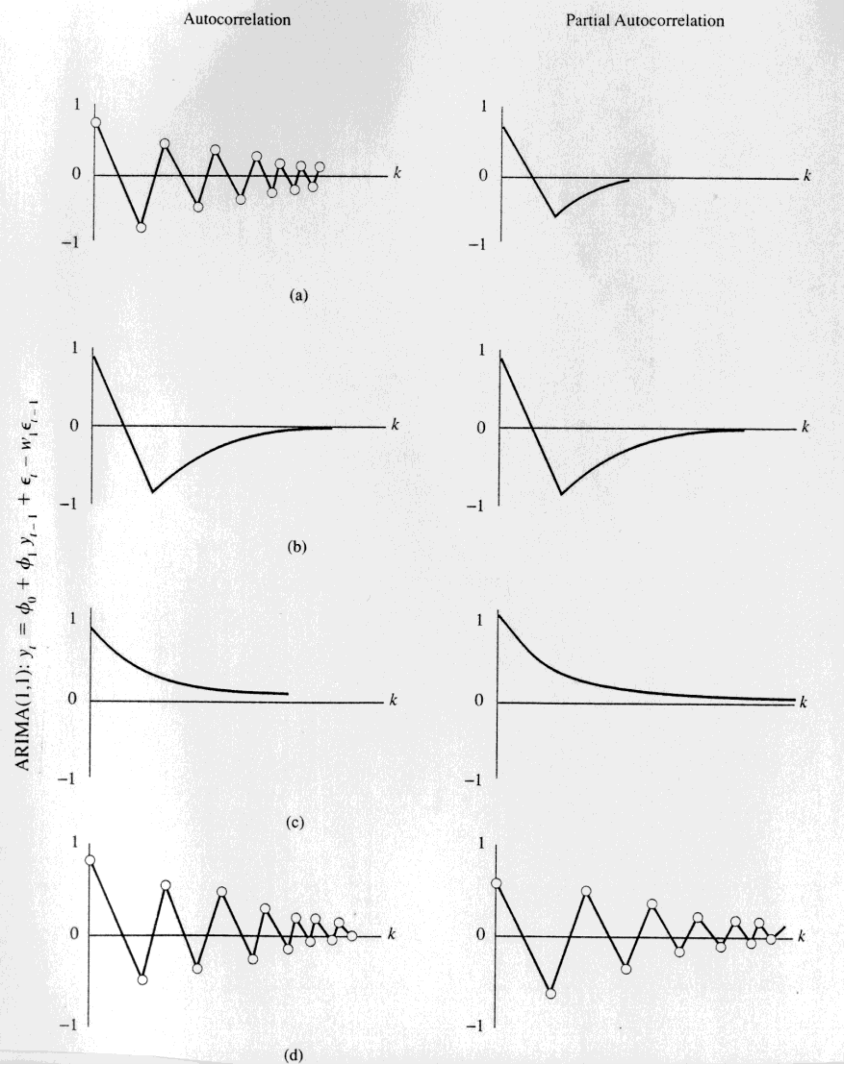
ARMA(1,1) $y_t = \mu + \phi\, y_{t-1} + e_t + \theta e_{t-1}$, $e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

ARMA(p,q) $y_t = \mu + \phi_1\, y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \cdots + \theta_q e_{t-q}$, $e_t \sim iidN(0, \sigma_e^2)$

(2) ARMA(1,1)

① 식별

- ACF는 시차 q(=1)까지는 0과 현저히 다르고, 그 이후는 AR(p)처럼 점차적으로 소멸함
- PACF는 시차 p(=1)까지는 0과 현저히 다르고, 그 이후는 MA(q)처럼 점차적으로 소멸함

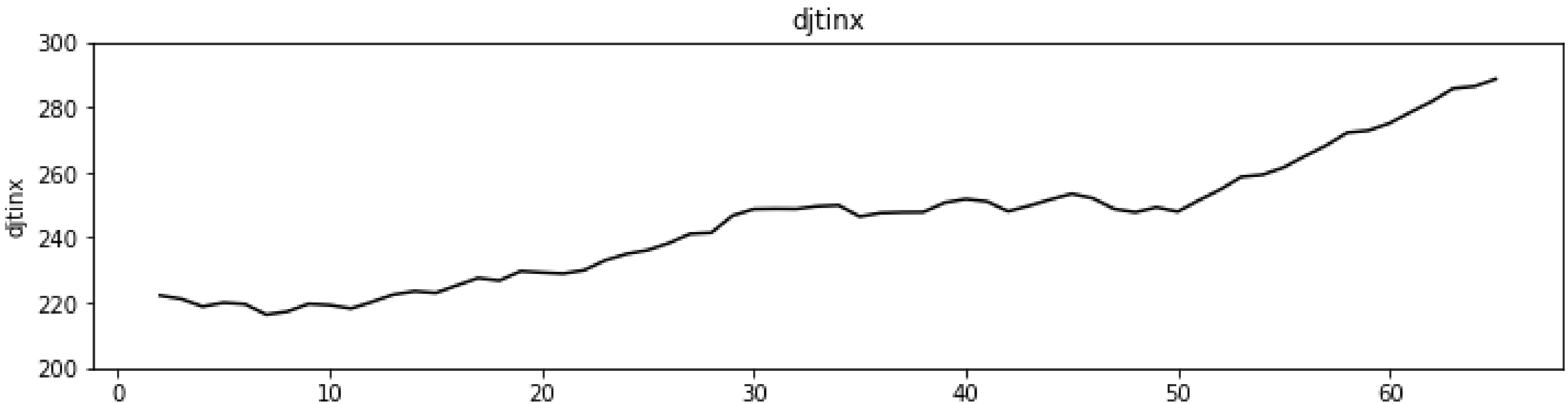


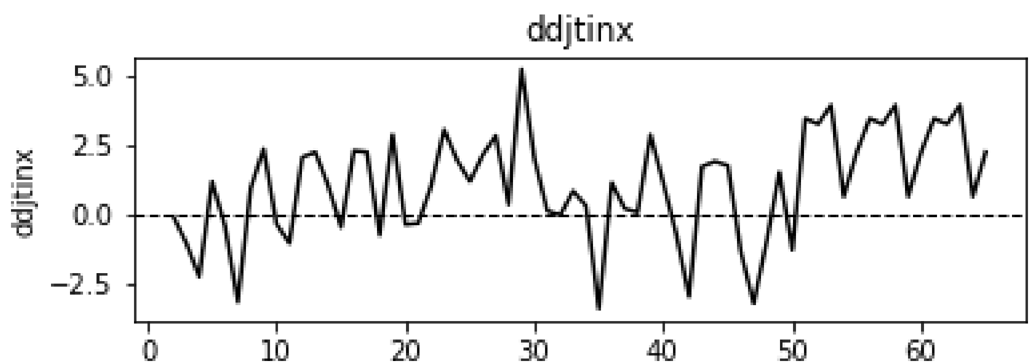
주요확률과정의 acf와 pacf (요약)

확률과정	acf	pacf
AR	점차적으로 0으로 수렴함 (tail off)	시차 p까지만 0과 현저히 다르고 이후 0으로 갑자기 이동 (즉, 마지막 스파이크의 시차길이는 AR의 차수와 동일) (cuts off after lag p)
MA	시차 q까지만 0과 현저히 다르고 이후 0으로 갑자기 이동 (즉, 마지막 스파이크의 시차길이는 MA의 차수와 동일) (cuts off after lag q)	점차적으로 0으로 수렴함 (tail off)
ARMA	시차 q까지는 0과 현저히 다르고, 그 이후는 AR(p)처럼 점차적으로 소멸함	시차 p까지는 0과 현저히 다르고, 그 이후는 MA(q)처럼 점차적으로 소멸함
white noise	모든 시차에 대해 0	모든 시차에 대해 0

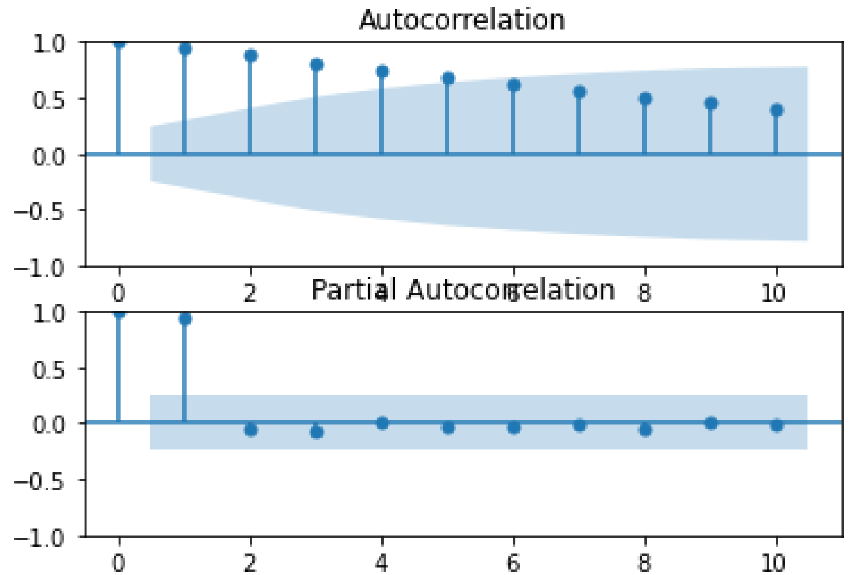
(3) 사례분석(ARMA(1,1))

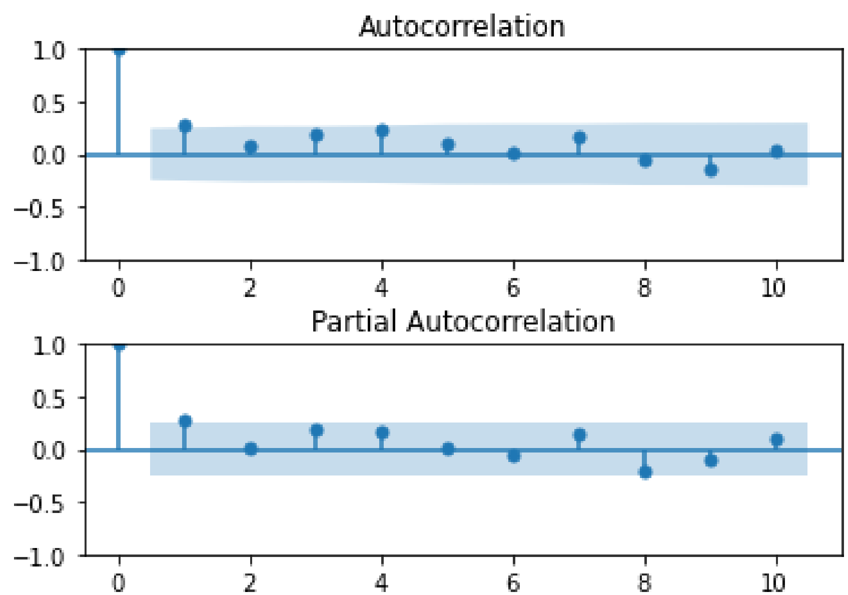
① 데이터





② 식별


Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
8
10
Partial Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10


Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10
Partial Autocorrelation
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
2
4
6
8
10

③ 추정

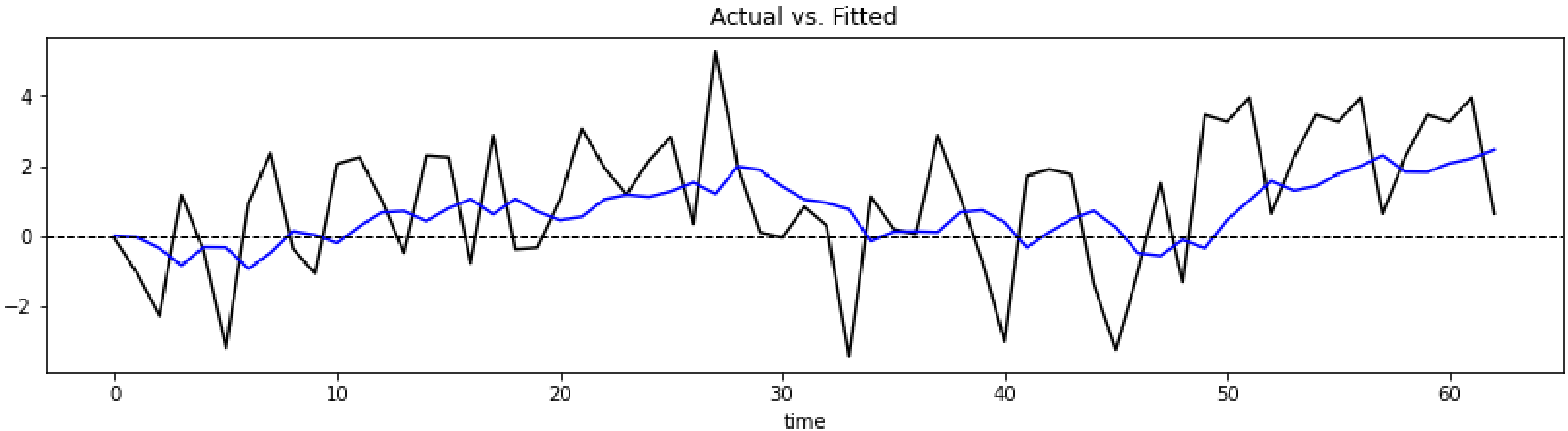
ARMA (1, 1)의 추정결과 $\hat{\phi}=0.9481$ $\hat{\theta}=-0.7406$이고, $\hat{\sigma}^2=3.4555$이다.

```
                               SARIMAX Results
==============================================================================
Dep. Variable:                ddjtinx   No. Observations:                   64
Model:                 ARIMA(1, 0, 1)   Log Likelihood                -130.824
Date:                Mon, 25 Mar 2024   AIC                            267.648
Time:                        20:39:39   BIC                            274.125
Sample:                    02-28-2013   HQIC                           270.200
                         - 05-31-2018
Covariance Type:                  opg
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
ar.L1          0.9481      0.082     11.580      0.000       0.788       1.109
ma.L1         -0.7406      0.162     -4.580      0.000      -1.058      -0.424
sigma2         3.4555      0.776      4.456      0.000       1.936       4.975
===================================================================================
Ljung-Box (L1) (Q):                   0.05   Jarque-Bera (JB):                 1.51
Prob(Q):                              0.82   Prob(JB):                         0.47
Heteroskedasticity (H):               1.41   Skew:                            -0.27
Prob(H) (two-sided):                  0.44   Kurtosis:                         2.47
===================================================================================
```

④ 모형의 검토

- 잔차의 독립성 검정 : Ljung-Box 검정 => 5% 유의수준에서 잔차가 독립적임
- 이분산여부 검정 => 5% 유의수준에서 이분산이 없음
- 정규분포 여부 : Jarque-Bera 검정 => 5% 유의수준에서 정규분포를 함

⑤ 실제치 및 추정치



⑥ 예측

- ARMA(1,1)의 경우를 예를 들어 n시점까지의 정보를 바탕으로 k기 이후 즉, (n+k)기에 대한 예측치를 구하는 방법은 다음과 같음

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \theta e_{t-1} + e_t$$

- 위 식에서 (n+1)기의 y 즉, y_{n+1}은 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$y_{n+1} = \mu + \phi y_n + \theta e_n + e_{n+1}$$

- 따라서 n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기에 대한 예측치를 구하면 다음과 같음.

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\mu} + \hat{\phi} y_n + \hat{\theta} e_n \quad \text{또는} \quad E[y_{n+1} \mid I_t] = \mu + \phi y_n + \theta e_n \leftarrow E[e_{n+1} \mid I_t = 0]$$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+1)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 :
$$\begin{aligned} & y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t] \qquad | \quad (*) \\ &= \mu + \phi y_n + \theta e_n + e_{n+1} - (\mu + \phi y_n + \theta e_n) \\ &= e_{n+1} \end{aligned}$$

- 예측오차 분산 :
$$\begin{aligned} & Var(y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t]) \\ &= Var(e_{n+1}) \\ &= \sigma_e^2 \end{aligned}$$

- 유사한 방법으로 (n+2)기의 y 즉, y_{n+2}은 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$y_{n+2} = \mu + \phi y_{n+1} + \theta e_{n+1} + e_{n+2}$$

- 따라서 n시점에서의 (n+2)기에 대한 예측치는 다음과 같음

$$\begin{aligned} \hat{y}_{n+2} &= \hat{\mu} + \hat{\phi}\hat{y}_{n+1} \\ &= \hat{\mu} + \hat{\phi}(\hat{\mu} + \hat{\phi} y_n + \hat{\theta} e_{n)} \\ &= (\hat{\phi}+1)\hat{\mu} + \widehat{\phi^2} y_n + \hat{\phi}\hat{\theta} e_n \end{aligned}$$

또는 $E[y_{n+2} \mid I_t] = \mu + \phi E[y_{n+1} \mid I_t] \;\leftarrow\; E[\theta e_{n+1} \mid I_t = 0],\; E[e_{n+2} \mid I_t = 0]$

- 따라서, n시점까지의 정보를 이용하여 (n+2)기 예측치에 대한 예측오차(실제치-예측치)와 그 분산은 다음과 같음

- 예측오차 : $y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t]$
$= \mu + \phi y_{n+1} + \theta e_{n+1} + e_{n+2} - \mu - \phi E[y_{n+1} \mid I_t]$
$= \phi e_{n+1} + \theta e_{n+1} + e_{n+2}$

$\because \ \phi y_{n+1} - \phi E[y_{n+1} \mid I_t] = \phi(y_{n+1} - E[y_{n+1} \mid I_t]) = \phi e_{n+1}$ from(※)

- 예측오차 분산 : $Var(y_{n+2} - E[y_{n+2} \mid I_t])$
$= Var(\phi e_{n+1} + \theta e_{n+1} + e_{n+2})$
$= (\phi^2 + \theta^2 + 1 + 2\phi\theta)\sigma_e^2$

- 일반적으로 n시점에서 h기 이후 즉, (n+h)기에 대한 예측치는 다음과 같음

$$\hat{y}_{n+h} = (\hat{\phi}^{h-1} + \hat{\phi}^{h-2} + \ldots + 1)\hat{\mu} + \hat{\phi}^{h} y_n + \hat{\phi}^{h-1}\hat{\theta} e_n$$

(점 예측치)

n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 예측치 및 (n+2)기에 대한 예측치를 구해보면 각각 다음과 같다.

2018-01-31 00:00:00	61	278.49	3.46
2018-02-28 00:00:00	62	281.75	3.26
2018-03-31 00:00:00	63	285.7	3.95
2018-04-30 00:00:00	64	286.33	0.63
2018-05-31 00:00:00	65	288.57	2.24

2018-01-31 00:00:00	1.64135
2018-02-28 00:00:00	1.19519
2018-03-31 00:00:00	1.74438
2018-04-30 00:00:00	-1.82307
2018-05-31 00:00:00	0.29252

$$\begin{aligned}\Delta \hat{y}_{t+1}(2018:6) &= \hat{\phi}\Delta y_t(2018:5) + \hat{\theta} e_t(2018:5) \\ &= (0.9481)\Delta y_t + (-0.7406)e_t \\ &= (0.9481*2.24) + (-0.7406*0.29252) \\ &= 2.124 - 0.2166 \\ &= 1.9074\end{aligned}$$

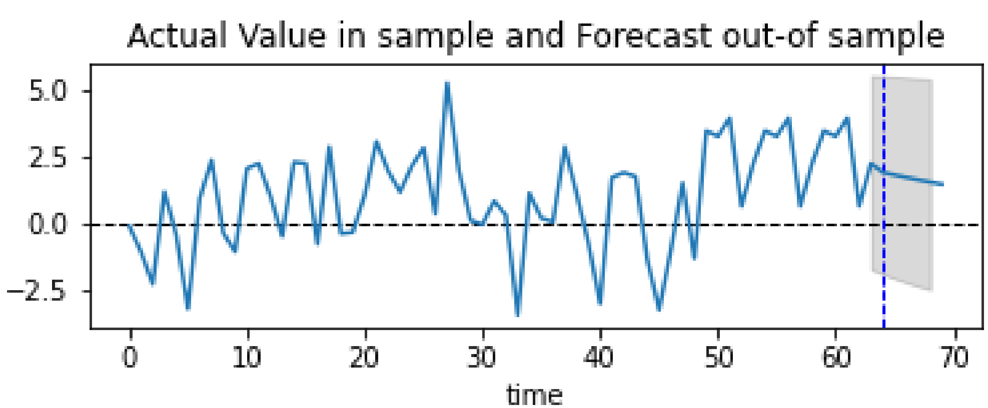
$$\begin{aligned}\Delta \hat{y}_{t+2} &= \hat{\phi}\Delta \hat{y}_{t+1} \\ &= (0.9481*1.9074) \\ &= 1.8084\end{aligned}$$

(구간예측)

한편, n 시점에서의 (n+1) 기에 대한 95% 구간예측 및 (n+2)기에 대한 95% 구간예측을 구해보면 각각 다음과 같다.

$$1.9074 \pm (1.96)\sqrt{3.4555} = [-1.736,\ 5.5508]$$

$$1.8084 \pm (1.96)\sqrt{((0.9481)^2 + (-0.7406)^2 + 1 - 2*0.9481*0.7406)3.4555}$$
$$= [-1.9127,\ 5.5295]$$




```
6-periods ahead Forecast Value of ddjtinx are :
2018-06-30    1.907088
2018-07-31    1.808099
2018-08-31    1.714248
2018-09-30    1.625269
2018-10-31    1.540908
2018-11-30    1.460927
Freq: M, Name: predicted_mean, dtype: float64

6-periods ahead 95% CI of Forecast Value of ddjtinx are :
[[-1.73630042  5.55047592]
 [-1.91288646  5.52908454]
 [-2.07513213  5.50362894]
 [-2.22455364  5.47509195]
 [-2.3624462   5.44426307]
 [-2.48992799  5.41178102]]
```