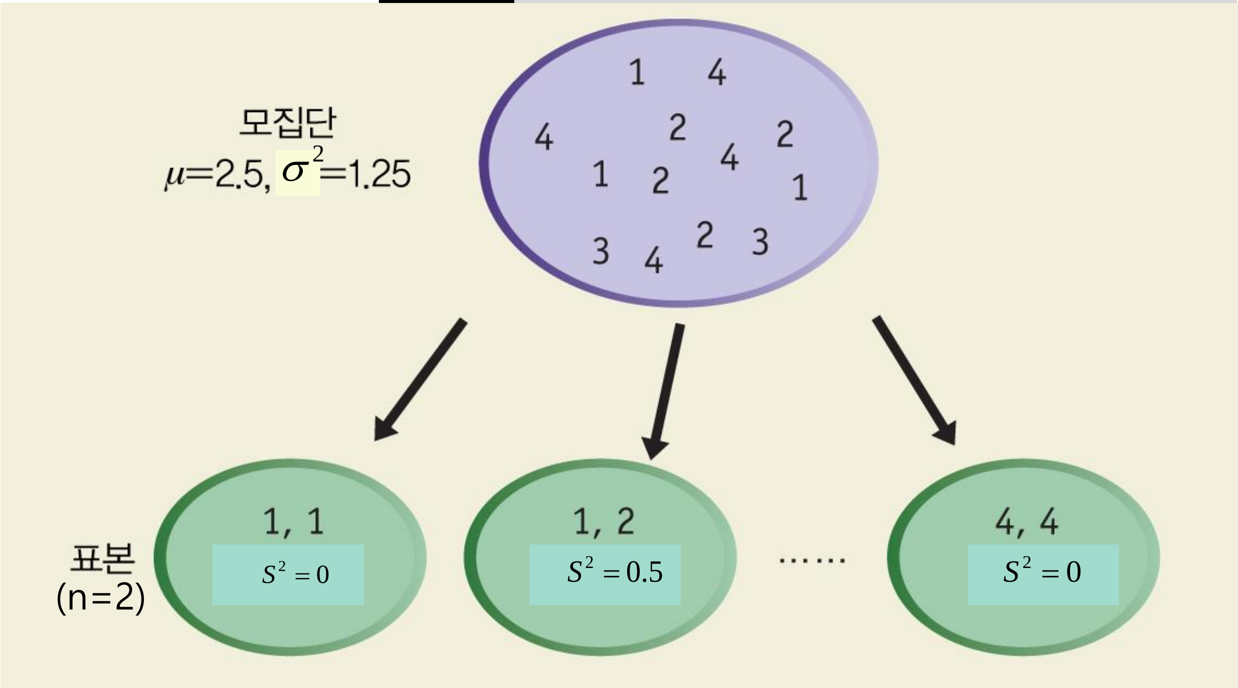
10-2 표본분포 2

제주권역 대학 e-러닝 지원센터

그림 모집단으로부터 n=2인 임의표본 추출



표본평균의 경우 중심극한정리에 의해 표본크기가 증가함에 따라 정규분포를 따르지만, **표본분산의 경우 정규분포를 따르지 않는다.**

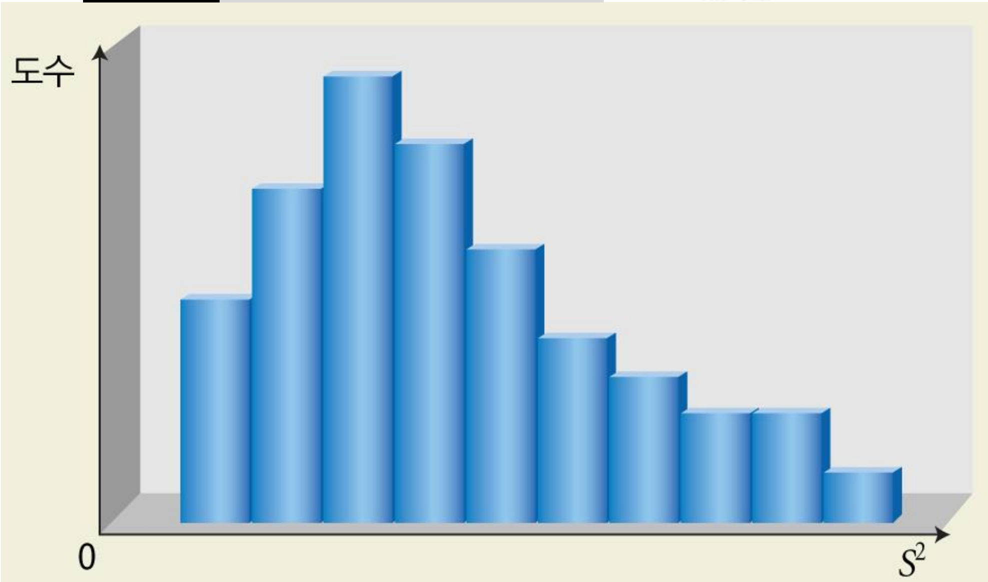
표본	표본평균	표본분산	표본	표본평균	표본분산
(1,1)	1	0	(3,1)	2	2
(1,2)	1.5	0.5	(3,2)	2.5	0.5
(1,3)	2	2	(3,3)	3	0
(1,4)	2.5	4.5	(3,4)	3.5	0.5
(2,1)	1.5	0.5	(4,1)	2.5	4.5
(2,2)	2	0	(4,2)	3	2
(2,3)	2.5	0.5	(4,3)	3.5	0.5
(2,4)	3	2	(4,4)	4	0

표본분산의 표본분포

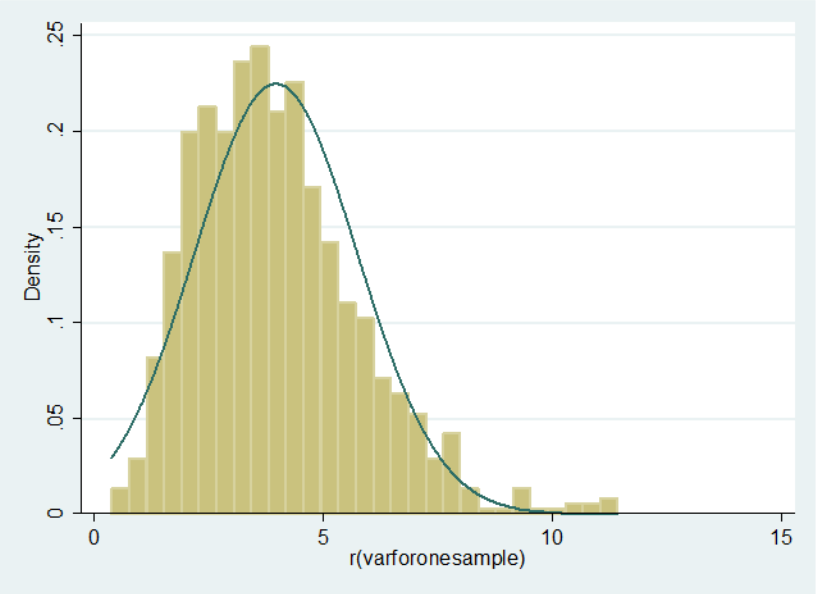
표본분산의 표본분포는 다음 히스토그램과 같은 분포를 이루게 된다.

그림 S^2의 히스토그램

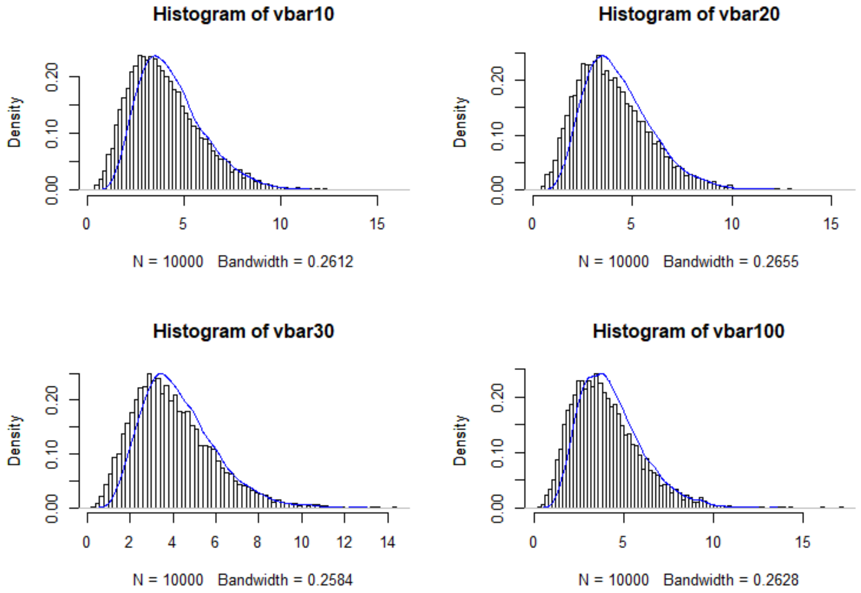
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{X})^2$$



정규분포에 따르는 모집단에서 1,000개 표본으로부터 구한 표본분산 $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{1000}^2$ 을 이용하여 막대그림표를 그리면 다음과 같다.



즉, 정규분포로부터 구한 표본분산의 분포는 정규분포에 따르지 않는다.



표본분산의 표본분포 특성

분산 σ^2을 갖는 모집단으로부터 크기 n의 임의표본이 추출되었으며

이 표본의 분산이 s^2이라고 하자.

1. $E(S^2)=\sigma^2$ ⟵ $E[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}] = \frac{(n-1)}{\sigma^2}E(s^2) = n-1$

2. $\sigma^2_{s^2}=\frac{2\sigma^4}{n-1}$ 또는 $\sigma_{s^2}=\sqrt{\frac{2\sigma^4}{n-1}}$ ⟵ $Var[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}] = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var(s^2) = 2(n-1)$

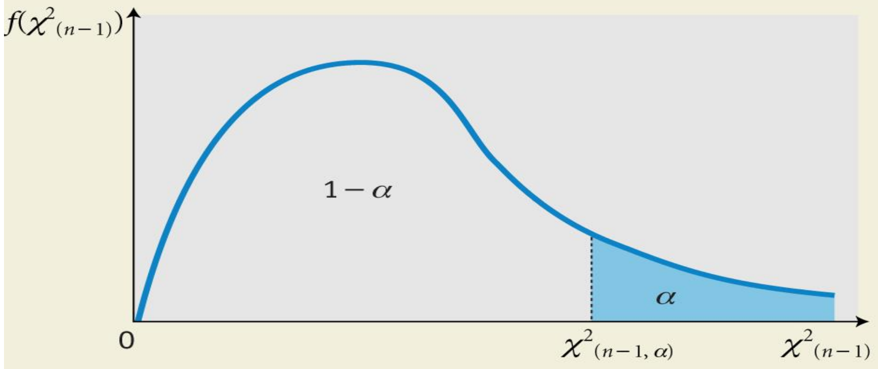
3. 모집단이 정규분포하면 $(n-1)S^2/\sigma^2$은 $\chi^2_{(n-1)}$-분포하게 된다.

예 어떤 확률변수가 χ_5^2- 분포를 한다면 다음 등식을 만족시켜 주는 K는 무엇인가?

$$P(\chi_5^2 < K) = 0.9 \text{ 또는 } P(\chi_5^2 > K) = 0.1$$

풀이 χ^2-분포표는 어떤 확률 α가 주어졌을 때 $\alpha = P(\chi^2_{(n-1)} > \chi^2_{(n-1,\ \alpha)})$를 만족하는 임계값 $\chi^2_{(n-1,\ \alpha)}$를 나타낸다. 이를 그림으로 보면 다음과 같다.

그림 $\alpha = \mathrm{P}(\chi^2_{(n-1)} > \chi^2_{(n-1,\ \alpha)})$를 만족하는 임계값 $\chi^2_{(n-1,\ \alpha)}$



따라서 확률변수 χ_5^2가 K보다 클 확률이 0.1이 되는 임계값은 $\chi^2_{5,\,0.1}=9.24$이므로 χ^2-분포표로부터 구하면 $K=9.24$이다.

자유도 $d.f.$	α									
	.995	**.990**	**.975**	**.950**	**.900**	**.100**	**.050**	**.025**	**.010**	**.005**
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59

10-2-2. 표본비율의 표본분포

모집단 비율 p는 표본비율 $\hat{p}$으로부터 추출될 수 있는데 **이 표본비율은 성공의 횟수를 표본크기로 나누어 구할 수 있다.**

이 때 성공의 횟수를 나타내는 확률변수 X는 이항분포를 이루며 표본비율은 $\hat{P} = \frac{\text{성공의횟수}}{\text{표본의수}} = \frac{X}{n}$이다.

이항분포에 따르는 X의 평균은 np, 분산은 np(1-p)이므로 $\hat{p}$ 의 평균과 분산은 다음과 같다

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = p$$

$$\sigma_{\hat{p}}^2 = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{p(1-p)}{n}$$

표본비율의 표본분포 특성

성공의 비율이 p인 모집단으로부터 크기 n의 임의표본이 추출되었으며 이 표본에서 성공의 비율은 $\hat{p}$ 이라고 하자.

$\hat{p} = \frac{X}{n}, X \sim B(n,p)$

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$$

$$Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$p(-1.96 \le z \le 1.96) = 0.95 \Rightarrow (\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

(95% 신뢰수준 하에서 최대허용오차)

$$\pm 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$