4-2 확률

확률의 공리(axioms of probability)

확률실험에서 Ω를 표본공간, E를 사건, ϕ를 공집합이라고 할 때, $E \subset \Omega,\ \phi \subset \Omega$이며, 확률은 항상 다음 조건을 만족한다.

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$
3. 모든 $i \ne j$ 에 대하여 $E_i \cap E_j = \phi$ 이면, 즉 모든 $i \ne j,\ i,\ j = 1,2,\cdots$ 에 대하여 E_i와 E_j가 상호배반사건이면

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$ 이다.

예 추출방법에 따른 확률 계산

흰 공(W) 6개와 검은 공(B) 4개가 들어 있는 상자에서 공을 계속하여 2개를 꺼낼 때 두 개의 공이 모두 흰 공일 확률을 추출방법에 따라 다음과 같이 구한다.

복원 추출법

처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 이고,

복원추출이므로 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률도 또한 $\frac{3}{5}$ 이다.

따라서 처음 두 공이 모두 흰 공일 확률은

$$P(1^{st}=W,2^{nd}=W)=P(1^{st}=W)\cdot P(2^{nd}=W)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$ 이다.

비복원 추출법

처음에 꺼낸 공이 흰 공이라는 전제하에서 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $P(2^{nd}=W\,|\,1^{st}=W)=\frac{5}{9}$ 이고, 처음 꺼낸 공이 검은 공일 때 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $P(2^{nd}=W\,|\,1^{st}=B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ 이다.

따라서 두 공 모두 흰 공일 확률은

$P(1^{st}=W,2^{nd}=W)=P(2^{nd}=W\,|\,1^{st}=W)P(1^{st}=W)=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$ 이다.

표 학생 100명의 분포

성별 \ 안경	착용	미착용	계
남	20	40	60
여	30	10	40
계	50	50	100

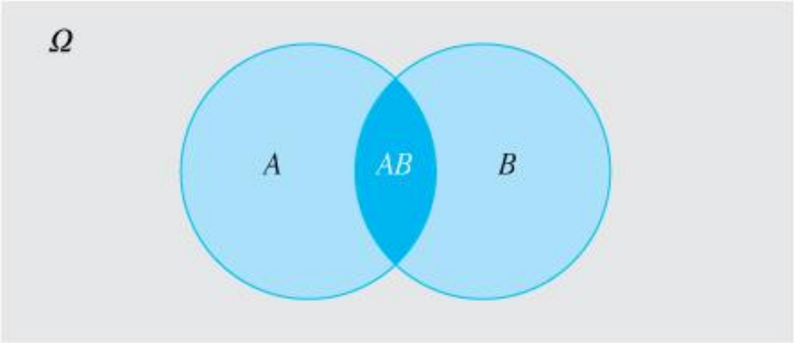
참고 확률의 종류

주변확률 (marginal prob.)	특정 범주의 빈도가 전체빈도에 대하여 차지하는 비율로서 **무조건부확률**이라고도 함
결합확률 (joint prob.)	두 개의 사건이 동시에 발생할 확률임
조건부확률 (conditional prob.)	사건 A가 일어났다고 가정할 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A를 조건으로 하는 B의 조건부확률이라 함

조건부 확률 (conditional probability)

실험에서 사전정보를 확률계산에 이용하는 방법

사건 A가 주어졌을 때 사건 B의 조건부 확률은 $P(A)\neq 0$ 이라는 전제하에서 다음과 같이 정의한다.



$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

확률적 독립성

두 사건 *A*, *B*가 다음 조건 중 하나를 만족하면 서로 확률적으로 독립이라고 한다.

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A \mid B) = P(A)$
3. $P(B \mid A) = P(B)$

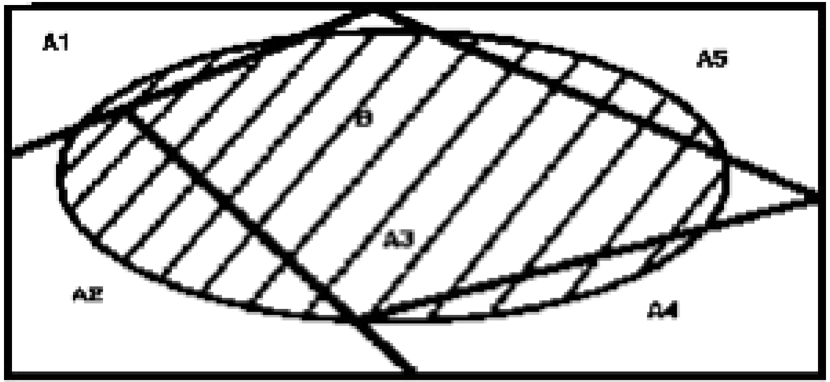
학생 100명의 분포 예에서 M을 남학생일 사건, G를 안경을 착용할 사건이라고 하면 $P(M)=0.6$, $P(G)=0.5$, $P(M \cap G)=0.2$이다.

$P(M \cap G) = 0.2 \neq P(M) \cdot P(G)=0.3$이므로 두 사건 M,G는 서로 독립이 아님

전확률 정리

k개의 사건이 서로 배반이고(mutually exclusive : k개의 사건이 서로 교차하지 않음) 그 중 꼭 하나의 사건이 일어난다고 하면, 또 하나의 사건 B에 대하여

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + \dots\dots\dots + P(A_k)P(B \mid A_k)$$ 이다.



4-2-4. 베이즈 정리

배경

-어떤 특정한 결과(effect)가 관찰되었을 때 그 결과가 어느 특정한 원인(cause)때문에 발생한 확률을 찾는 방법
-한 사건의 발생 시 그 사건이 특정 조건 하에서 발생했을 확률을 계산

(idea)의사결정에 있어서 주관적으로 결정된 **사전확률(Prior probability)**을 추가적인 새로운 정보가 주어졌을 경우 수정하여 **사후확률(posterior)**을 얻을 수 있는데 이러한 **확률계산에 사용되는 수단이 Bayes정리**이다.

사전확률 → 조사 혹은 실험을 통한 새로운 정보 → Bayes정리 적용 → 사후확률

베이즈정리

서로 배반하는 두 사건 A_1, A_2중에서 한 사건은 반드시 일어난다고 하자.

이때 또 다른 사건 B(effect)가 일어났을 경우 이것이 A_1(또는 A_2)이라는 원인(cause)에 의해 일어날 확률 $P(A_1 \mid B)$(또는 $P(A_2 \mid B)$)는

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$ 이고

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$ 이다.

베이즈정리 증명

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$ (조건부정리에 의해서)

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$ (전확률정리에 의해서)

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$ (곱셈정리에 의해서)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

베이즈정리 일반화

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + \dots + P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

예

BOX1	BOX2
D = 3 N = 7	D = 1 N = 9

Q **불량품을 꺼냈을 때 이것이 상자 1에서 나왔을 확률은? 즉, $P(A_1 \mid B)$?**

A_1 : 상자1에서 택하는 사건
A_2 : 상자2에서 택하는 사건
B : 꺼낸 것이 불량품일 사건

A

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$= \frac{4}{20}$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B \mid A_1)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$$
$$= \frac{3}{20}$$

$$\therefore \quad P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4}$$

참고	$P(B \mid A_1)$ 또는 $P(A_1 \mid B)$ 구별할 것