

6-1

확률분포와 기대값



6-1-1. 기대값

기대값 (expected value : 평균)

기대값은 확률분포에서 **분포의 무게중심**을 말하며, 확률값을 가중치로 하는 확률변수의 가능한 값에 대한 가중평균이라고 할 수 있다
 확률변수 X 의 기대값은 $E(X)$ 로 표현하며 각각 다음과 같이 구한다

1. 이산형 확률변수

이산형 확률변수 X 의 가능한 값이 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 이며,

$$P(X = x_i) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{일 때}$$

X 의 기대값 $E(X)$ 는 다음과 같다

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$



2. 연속형 확률변수

연속형 확률변수 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면 X 의 기대값 $E(X)$ 는 다음과 같다

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

예1 이산형 확률변수의 기대값 계산

두 개의 주사위를 던지는 실험에서 확률변수 X 를 '두 주사위 눈금의 합'이라고 정의하면 표본공간은 다음과 같다

첫번째 / 두번째	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

X의 가능한 값은 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12이며, 위 표본공간에서 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
확률	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



위 확률분포표를 이용하여 확률변수 X 의 기대값을 계산해 보면 다음과 같다

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} \\ &\quad 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} \\ &\quad 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = 7 \end{aligned}$$

기대값의 특성

X, Y 를 확률변수, a, b 를 상수라고 할 때, 기대값은 항상 다음 조건을 만족한다.

$$1. E(a) = a$$

즉, 상수의 기댓값은 상수 그 자체이다.

$$2. E(aX + b) = aE(X) + b$$

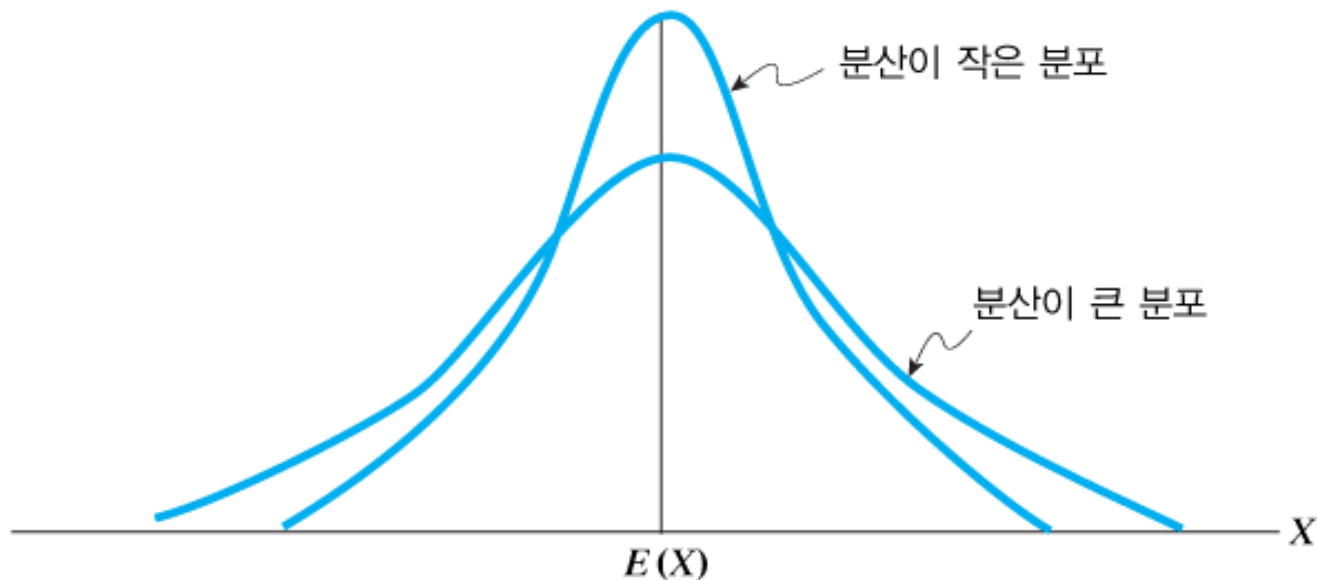
$$3. E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

상수 a 와 b 를 제외할 때 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ 가 되는데, 이는 두 확률변수의 합의 기대값은 각 확률변수의 기대값의 합과 같음을 의미한다.



분산(variance)

평균이 확률분포의 무게중심인 데 비하여 분산은 **확률분포의 흩어진 정도를 측정**하는 것으로 평균이 같은 경우에도 분산의 크기에 따라서 분포의 모양이 달라진다.



확률변수 X 의 기대값 $E(X) = \mu$ 라고 할 때, 분산(variance)은 X 와 μ 의 편차의 제곱, 즉 $(X - \mu)^2$ 의 기대값으로 $Var(X)$ 또는 σ_X^2 으로 표현되며,

$$\sigma_X^2 = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 \text{로 구한다.}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

여기에서 확률변수 X 를 나타낼 필요가 없는 경우에는 σ_X^2 에서 X 를 없애고 σ^2 으로 표현한다. 분산의 양의 제곱근을 표준편차(standard deviation)라고 하며 σ 로 표현한다. 즉,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \text{이다.}$$



예2 이산형 확률변수의 분산 계산

이산형 확률변수 X 의 확률분포가 다음과 같을 때 X 의 평균과 분산을 구해보자.

X	0	1	2	3
확률	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\mu = E(X) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 2 \times 3/8 + 3 \times 1/8 = 1.5$$

$$E(X^2) = 0 \times 1/8 + 1 \times 3/8 + 4 \times 3/8 + 9 \times 1/8 = 3$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

확률변수의 X 의 분산 σ^2_x 는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma^2_x = E[(X - \mu_x)^2] = \sum_x (x - \mu_x)^2 P_X(x) = E(X^2) - \mu_x^2$$

표준편차 σ_x 는 분산의 제곱근이다.

분산의 특성

1. $\text{Var}(a) = 0$
2. $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$
3. $\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$
4. 만약 X 와 Y 가 독립이면 $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ / $\text{Var}(X-Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
5. 만약 X 와 Y 가 독립이 아니면 $\text{Var}(aX \pm bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) \pm 2ab \text{Cov}(X, Y)$

참고 기대 및 분산연산자를 이용한 자료의 선형변환

(1) 상수(c)를 더할 때

$$W = X + c$$

평균	$E(W) = E(X + c) = E(X) + c$
----	------------------------------

분산	$var(W) = var(X + c) = var(X)$
----	--------------------------------

(2) 상수 곱했을때

$$W = cX$$

평균	$E(W) = E(cX) = cE(X)$
----	------------------------

분산	$var(W) = var(cX) = c^2 var(X)$
----	---------------------------------

(3) 상수 더하고 곱했을때

$$W = cX + d$$

평균	$E(W) = E(cX + d) = cE(X) + d$
----	--------------------------------

분산	$var(W) = var(cX + d) = c^2 var(X)$
----	-------------------------------------