

9-1 이론적 확률분포(연속형) 3



χ^2 -분포

확률변수 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 이 서로 독립적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따를 때,
 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 의 제곱합 $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ 은 자유도가 n 인 χ^2 분포를 따른다.
자유도가 n 인 χ^2 분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

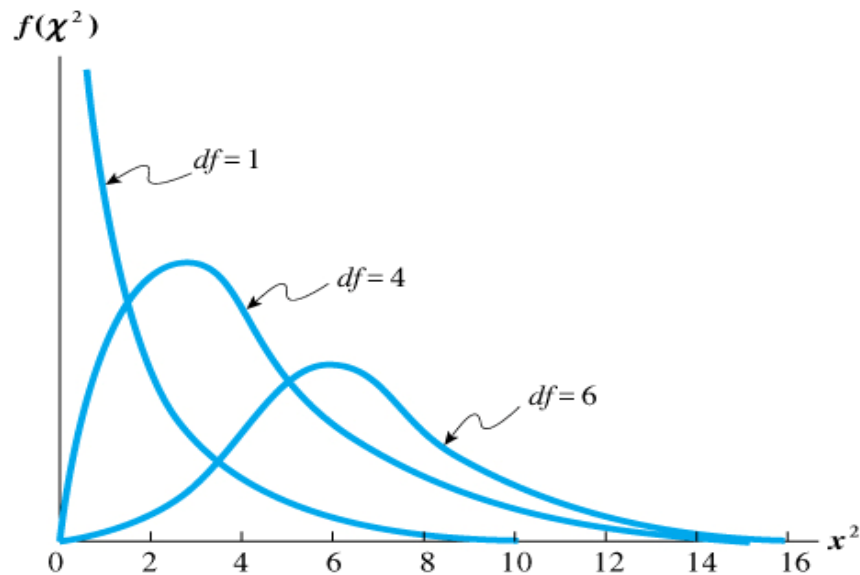
즉, $X \sim \chi^2_{(n)}$ 일 때

$$E(X) = n$$

$$\text{Var}(X) = 2n$$

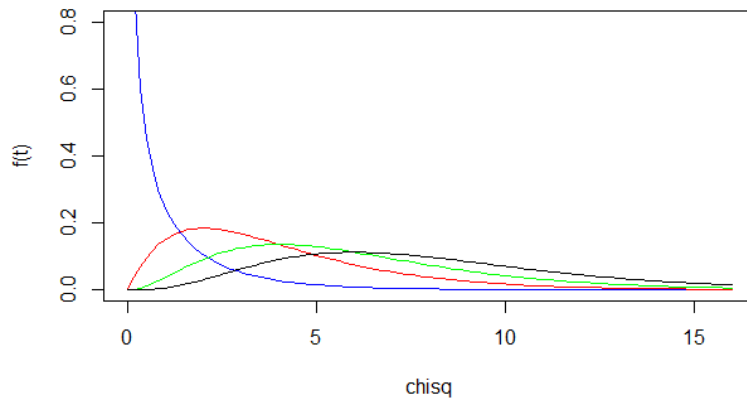
이다.



그림 χ^2 분포

χ^2 분포는 자유도가 모수이며, 따라서 자유도의 크기에 따라 분포의 형태가 달라진다. 그림은 몇 개의 자유도에 따르는 χ^2 분포의 그림이 주어져 있는데, 자유도가 클수록 정규분포와 근사한 χ^2 분포 형태를 갖는다.

```
1 n_list<-c(2,5,7,9) # 표본수(n)
2 df_list<-n_list-1 # 자유도
3
4 curve(dchisq(x, 1, ncp=0), add=T, col="blue", xlim=c(0, 16), ylim=c(0, 0.8), xlab="chisq", ylab="f(t)")
5 curve(dchisq(x, 4, ncp=0), add=T, col="red", xlim=c(0, 16), ylim=c(0, 0.8), xlab="chisq", ylab="f(t)")
6 curve(dchisq(x, 6, ncp=0), add=T, col="green", xlim=c(0, 16), ylim=c(0, 0.8), xlab="chisq", ylab="f(t)")
7 curve(dchisq(x, 8, ncp=0), add=T, col="black", xlim=c(0, 16), ylim=c(0, 0.8), xlab="chisq", ylab="f(t)")
8
9 par(mfrow=c(2,2))
10
11 for (i in 1:length(df_list)) {
12
13   curve(dchisq(x, df_list[i], ncp=0), xlim=c(0, 16), ylim=c(0, 0.8), xlab="chisq", ylab="f(t)", main=paste("df=", df_list[i]))
14
15 }
16
```



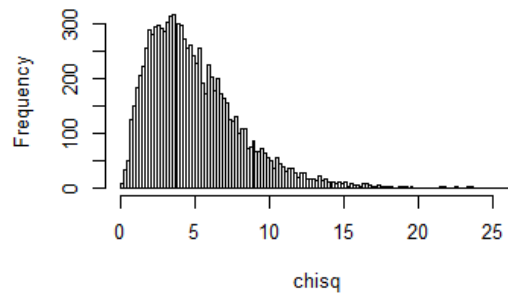
또한 분산이 σ^2 인 정규분포를 이루는 모집단으로부터 표본크기가 n 인
선택 가능한 모든 임의표본이 추출되었을 때,
각 표본의 분산을 S^2 이라고 하면

$$\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

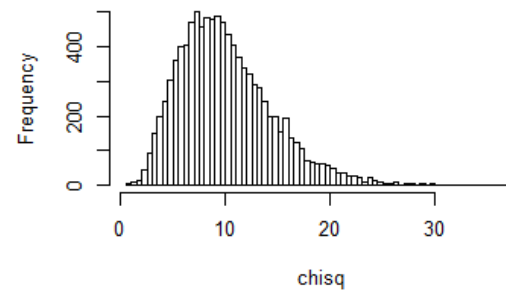
은 자유도가 $n-1$ 인 χ^2 -분포를 따른다.



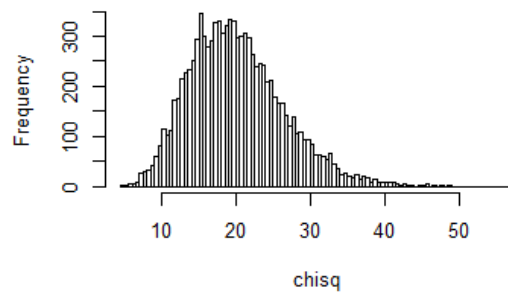
df= 5



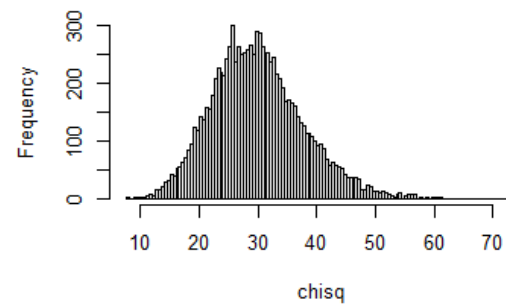
df= 10



df= 20



df= 30



카이제곱은 자유도 $n-1$ 에 따라 분포의 형태가 다르므로 각각의 자유도 및 확률에 따른 카이제곱의 값이 다음과 같이 주어져 있다.

예 자유도가 5일 때 $\chi^2_{0.1} = 9.236$ 인데 이는 $\Pr(\chi^2 \geq 9.236) = 0.1$ 을 의미한다.

자유도	P=0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209

```

1 df<-10
2
3 chi1<-numeric(df)
4 chi2<-numeric(df)
5 chi3<-numeric(df)
6 chi4<-numeric(df)
7 chi5<-numeric(df)
8 chi6<-numeric(df)
9 chi7<-numeric(df)
10 chi8<-numeric(df)
11 chi9<-numeric(df)
12 chi10<-numeric(df)
13
14 for(j in 1:df) {
15   chi1[j]<-qchisq(0.01,j)
16 }
17 for(j in 1:df) {
18   chi2[j]<-qchisq(0.02,j)
19 }
20 for(j in 1:df) {
21   chi3[j]<-qchisq(0.05,j)
22 }
23 for(j in 1:df) {
24   chi4[j]<-qchisq(0.1,j)
25 }
26 for(j in 1:df) {
27   chi5[j]<-qchisq(0.2,j)
28 }
29 for(j in 1:df) {
30   chi6[j]<-qchisq(0.8,j)
31 }
32 for(j in 1:df) {
33   chi7[j]<-qchisq(0.9,j)
34 }
35 for(j in 1:df) {
36   chi8[j]<-qchisq(0.95,j)
37 }
38 for(j in 1:df) {
39   chi9[j]<-qchisq(0.99,j)
40 }
41 for(j in 1:df) {
42   chi10[j]<-qchisq(0.99,j)
43 }
44 (chi<-cbind(chi1,chi2,chi3,chi4,chi5,chi6,chi7,chi8,chi9,chi10))
45 |

```

```

> (chi<-cbind(chi1,chi2,chi3,chi4,chi5,chi6,chi7,chi8,chi9,chi10))
      chi1      chi2      chi3      chi4      chi5      chi6      chi7      chi8      chi9      chi10
[1,] 0.0001570879 0.0006284502 0.00393214 0.01579077 0.06418475 1.642374 2.705543 3.841459 6.634897 6.634897
[2,] 0.0201006717 0.0404054146 0.10258659 0.21072103 0.44628710 3.218876 4.605170 5.991465 9.210340 9.210340
[3,] 0.1148318019 0.1848318190 0.35184632 0.58437437 1.00517401 4.641628 6.251389 7.814728 11.344867 11.344867
[4,] 0.2971094805 0.4293981900 0.71072302 1.06362322 1.64877662 5.988617 7.779440 9.487729 13.276704 13.276704
[5,] 0.5542980767 0.7518889348 1.14547623 1.61030799 2.34253431 7.289276 9.236357 11.070498 15.086272 15.086272
[6,] 0.8720903302 1.1344192434 1.63538289 2.20413066 3.07008841 8.558060 10.644641 12.591587 16.811894 16.811894
[7,] 1.2390423056 1.5642930043 2.16734991 2.83310692 3.82232191 9.803250 12.017037 14.067140 18.475307 18.475307
[8,] 1.6464973727 2.0324769181 2.73263679 3.48953913 4.59357361 11.030091 13.361566 15.507313 20.090235 20.090235
[9,] 2.0879007359 2.5323786659 3.32511284 4.16815901 5.38005321 12.242145 14.683657 16.918978 21.665994 21.665994
[10,] 2.5582121602 3.0590514109 3.94029914 4.86518205 6.17907926 13.441958 15.987179 18.307038 23.209251 23.209251

```